

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Г. И. ШИШКИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА СТЕФАНА С РАЗРЫВНОЙ ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 6 I 1975)

В отличие от исследованных ранее задач типа Стефана (¹⁻⁵) в рассматриваемой задаче граница раздела фаз претерпевает разрыв в некоторый момент времени. В случае постоянных коэффициентов при некоторых предположениях на данные задачи доказано существование решения для всех $t \geq 0$.

К постановке рассматриваемой задачи приводит, например, задача пахождения распределения тепла и влаги в капиллярно-пористом стержне. Пусть в начальный момент времени часть стержня (при $0 \leq x < c$) влажная и температура ее ниже температуры кипения; другая часть стержня (при $c < x \leq l$) сухая, причем температура этой части стержня лишь в окрестности границы раздела (точка $x=c$) и правого конца стержня ($x=l$) выше температуры кипения, а в остальной части ниже температуры кипения. В стержне будет существовать подвижная граница раздела $s(t)$, разделяющая сухую и влажную части стержня. Предполагается, что теплоотдача на границе раздела со стороны сухой части стержня подчиняется условию Ньютона; кроме того, на границе раздела выполняется закон сохранения энергии. Избыток тепла сухой части стержня (в окрестности границы раздела) уходит к границе раздела и на нагрев сухого участка, где температура ниже температуры кипения. При некоторых начальных условиях может сложиться такая ситуация, что в некоторый момент времени температура на границе раздела и в ее окрестности станет не выше температуры кипения. В этот момент влага в стержне распространится скачком на сухом участке, где температура была не выше температуры кипения.

Приступим к рассмотрению математической задачи. Пусть функция $s(t)$, $0 < s(t) < 1$, кусочно непрерывна и терпит разрыв не более чем в одной точке $t=\kappa$. Пусть, кроме того, при $t \neq 0$, $t \neq \kappa$ функция $s(t)$ непрерывно дифференцируема, причем $s(\kappa+0) > s(\kappa-0)$. Множество таких функций $s(t)$ обозначим через $\mathcal{H}$. Пусть $T > 0$ произвольное число. Введем области D , D_1 , D_2 и границы Γ_1 , Γ_2 :

$$D_1 = \{0 < x < s(t), 0 < t \leq \kappa\} \cup \{0 < x < s(t), \kappa < t \leq T\},$$

$$D_2 = \{s(t) < x < 1, 0 < t \leq \kappa\} \cup \{s(t) < x < 1, \kappa < t \leq T\},$$

$$D = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}, \quad \Gamma_1 = \{x=0, 0 \leq t \leq T\} \cup \{0 \leq x \leq s(0), t=0\},$$

$$\Gamma_2 = \{s(0) \leq x \leq 1, t=0\} \cup \{x=1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Скажем, что функция $u(x, t)$ принадлежит множеству $\mathcal{H}(D_i)$, если $s(t) \in \mathcal{H}$, $u(x, t)$ непрерывна в $\bar{D}_i$, u_{xx} непрерывна в $\bar{D}_i \setminus \Gamma_i$, кроме, быть может, точек $(s(\kappa-0), \kappa)$, $(s(\kappa+0), \kappa)$, производные u_t и u_{xx} непрерывны в D_i .

Требуется найти число κ и функции $s(t) \in \mathcal{H}$, $u(x, t) \in \mathcal{H}(D_2)$, $u_i(x, t) \in \mathcal{H}(D_i)$, $i=1, 2$, такие, чтобы выполнялись соотношения

$$L_i u_i(x, t) = a_i^2 u_{ixx}(x, t) - u_{it}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_i; \quad (1)$$

$$L u(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_2; \quad (2)$$

$$u_i(0, t) = f_i(t), \quad u(1, t) = f(t), \quad t \geq 0; \quad (3)$$

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq c; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad c \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$u_i(s(t), t) = 0, \quad t \geq 0; \quad \lambda u_x(s(t), t) = \alpha u(s(t), t), \quad t > 0, \quad t \neq \kappa; \quad (5)$$

$$\lambda a^{-2} u(s(t), t) s'(t) + \lambda u_x(s(t), t') + \lambda_2 u_{2x}(s(t), t) - \lambda_1 u_{1x}(s(t), t) = 0, \\ t > 0, \quad t \neq \kappa; \quad s(0) = c; \quad (6)$$

$$u_1(x, \kappa+0) = u(x, \kappa-0), \quad u_2(x, \kappa+0) = 0, \quad s(\kappa-0) \leq x \leq s(\kappa+0). \quad (7)$$

Число κ должно удовлетворять следующему условию: для любого $t \neq \kappa$ существует достаточно малое число $\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$u(x, t) > 0 \text{ при } s(t) < x < s(t) + \varepsilon; \quad u(x, \kappa) \leq 0 \text{ при } s(\kappa-0) \leq x \leq s(\kappa+0); \quad (8)$$

здесь i принимает значения 1, 2.

Функции f_i , f , φ_i , φ удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi_i(0) = f_i(0), \quad \varphi_i(c) = 0, \quad \varphi(1) = f(0), \quad (9)$$

и неравенствам

$$(-1)^i f_i(t) \geq 0, \quad (-1)^i \varphi_i(x) \geq 0, \quad f(t) \geq 0; \quad \varphi(c) > 0, \quad \varphi(1) > 0. \quad (10)$$

Функции $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u(x, t)$, $s(t)$, удовлетворяющие соотношениям (1)–(8), назовем решением задачи $\mathcal{A}$. Будем говорить, что функции u_1 , u_2 , u , s являются решением задачи $\mathcal{B}$ при $0 \leq t \leq T$, если $s(t) \in C_1(0, T)$, $u(s(t), t) > 0$ и выполняются соотношения (1)–(6) при $0 < t < T$.

Укажем условия, достаточные для существования решения с разрывной подвижной границей. Пусть функции

$$\Phi_1(x, t) = N_1[(x - \xi_1)^2 + 2a^2 t] - N_2, \\ \Phi_2(x, t) = -N_3[(x - c + \tau_1 \alpha a^2 \lambda^{-1})^2 + 2a^2 t] + N_4, \quad (x, t) \in D,$$

где N_j , ξ_1 , τ_1 — некоторые положительные числа, $c < \xi_1 < 1$, таковы, что

$$\Phi_1(\xi_1, t) \leq \Phi_2(\xi_1, t), \quad 0 \leq t \leq \tau_1; \quad \Phi_2(x, \tau_1) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \xi_1. \quad (11)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\varphi(x) \leq \Phi_1(x, 0), \quad f(t) \leq \Phi_1(1, t), \quad (x, t) \in G_2, \quad t \leq \tau_1; \\ \varphi(x) \leq \Phi_2(x, 0), \quad c \leq x \leq \xi_1; \quad (12)$$

функция $\varphi(x)$ обращается в нуль лишь при $x = x_1$ и $x = x_2$, причем

$$\varphi(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_1 < x < x_2. \quad (13)$$

Тогда, используя функции $\Phi_1(x, t)$, $\Phi_2(x, t)$ в качестве барьерных, можно показать, что решения задачи $\mathcal{B}$ при $0 \leq t \leq T$, где $T \geq \tau_1$, не существует.

Будем требовать, чтобы краевые условия удовлетворяли также соотношениям

$$\varphi'(x_2) > 0, \quad \lambda \varphi'(c) - \alpha \varphi(c) = 0; \\ m_1 \leq f_2(t), \quad |f_1(t)| \leq M_1, \quad t \geq 0; \\ |\varphi_i(x)| \leq M_1(1-x), \quad 0 < x \leq c, \\ \varphi(x) \geq -M_1(1-x), \quad c \leq x \leq 1, \\ \alpha f(t) > (\lambda_1 + \lambda_2) M_1, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f(t)$ при $0 \leq t < \infty$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ при $0 \leq x \leq c$ и $\varphi(x)$ при $c \leq x \leq 1$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соотношениям (9)–(14).

Тогда существует решение задачи $\mathcal{A}$ для всех $t > 0$.

Существование решения задачи $\mathcal{A}$ до момента $t = \kappa$ разрыва подвижной границы доказывается с использованием тепловых потенциалов подобно (5).

При продолжении решения задачи $\mathcal{A}$ при $t > \kappa$ в качестве начальных данных используются значения $u_1(x, \kappa)$, $u_2(x, \kappa)$, $u(x, \kappa)$. Решение задачи строится как предел последовательности вспомогательных решений с данными задачи, близкими к исходным. Можно выбрать начальные функции $\varphi(x)$, $\varphi_i(x)$ близкими к $u(x, \kappa+0)$, $u_i(x, \kappa+0)$ соответственно и такими, что вспомогательные решения $u(x, t)$, $u_i(x, t)$, $s(t)$ удовлетворяют оценкам

$$\gamma \leq \overset{n}{s}(t) \leq 1 - \gamma, \quad |s(t) - s(\kappa+0)| \leq A \sqrt{t - \kappa},$$

$$\overset{n}{\omega}(t), |\overset{n}{v}_i(t)|, |\overset{n}{\omega}(t)| \frac{d}{dt} \overset{n}{s}(t) \leq A, \quad (15)$$

$$\overset{n}{u}(x, t), \quad \overset{n}{\omega}(t) \leq A^{-1} \sqrt{t - \kappa}, \quad \overset{n}{\omega}(t) \leq q_n + A \sqrt{t - \kappa},$$

где $\omega(t) = u(s(t), t)$, $v_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_i(s(t), t)$, $q_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, при $\kappa + v \leq t \leq T$, где v — произвольное достаточно малое положительное число, справедливы оценки

$$\left| \frac{d}{dt} \overset{n}{s}(t) \right|, \quad \left| \frac{d}{dt} \overset{n}{\omega}(t) \right|, \quad \left| \frac{d}{dt} \overset{n}{v}(t) \right|, \quad \left| \frac{d^2}{dt^2} \overset{n}{s}(t) \right| \leq A(v); \quad (16)$$

$$|\lambda u_x(x, t) - \alpha u(x, t)| \leq A(v) (x - s(t)), \quad \overset{n}{s}(t) \leq x \leq 1. \quad (17)$$

В силу оценок (15), (16), из последовательностей $\{\omega(t)\}$, $\{v_i(t)\}$, $\{s(t)\}$ можно выделить сходящиеся последовательности. Предельные функции $\omega(t) \in C[\kappa, T]$, $v_i(t) \in C(\kappa, T]$, $s(t) \in C[\kappa, T] \cap C_1(\kappa, T]$. Используя свойства потенциалов и оценку (17), можно показать, что функции $u(x, t)$, $u_i(x, t)$, задаваемые интегральными представлениями (см., например, (13), (14) из ⁽⁴⁾), функция $s(t)$ являются решением задачи $\mathcal{B}$ при $\kappa \leq t \leq T$.

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно показать, что скорость движения границы раздела фаз вблизи момента разрыва подвижной границы неограничена.

З а м е ч а н и е 2. В том случае, когда задача рассматривается на оси $(-\infty < x < \infty)$, а начальные функции имеют вид

$$\varphi_i(x) = v_i x \text{ при } x \leq 0, \quad \varphi(x) = v x \text{ при } x \geq 0$$

и $\alpha = 0$, задача $\mathcal{B}$ имеет автомодельное решение. Скорость движения границы раздела фаз стремится к бесконечности при $t \rightarrow 0$; при этом функции $\omega(t)$, $v_i(t)$, $s(t)$ имеют вид

$$\omega(t) = \omega_0 \sqrt{t}, \quad v_i(t) = v_i, \quad s(t) = s_0 \sqrt{t}.$$

Числа ω_0 , v_i , s_0 определяются как решение системы трансцендентных уравнений.

Пользуясь случаем выразить искреннюю благодарность А. М. Ильицу за обсуждение при выполнении этой работы.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
25 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Рубинштейн, Проблема Стефана, Рига, 1967. ² А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968. ³ Б. М. Будак, Ф. П. Васильев, А. Б. Успенский, Сб. работ Вычислительного центра МГУ, М., в. 4, 139 (1965). ⁴ Г. И. Шишкин, ДАН, т. 197, № 6, 1276 (1971). ⁵ Г. И. Шишкин, Тр. Ин-та матем. и мех. УНЦ АН СССР, Свердловск, в. 11, 5 (1973).