

А. И. ФУРМЕНКО

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЕ ЛИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 5 IX 1975)

В 1973 г. в работе Н. Н. Ладиса ⁽³⁾ были найдены алгебраические необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности двух линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами. Этим самым была разрешена задача, поставленная В. И. Арнольдом в ⁽¹⁾. В настоящей работе сходные вопросы рассматриваются для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на группе Ли.

Пусть G — связная односвязная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Xu(\tau) = A(x)u(\tau) \quad (\tau \in G, x \in \mathfrak{g}), \quad (1)$$

где $u(\tau)$ — искомая функция, определенная на группе G и принимающая значения в $\mathbb{R}^n$, $A(x)$ — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру $L(\mathbb{R}^n)$ всех линейных операторов на $\mathbb{R}^n$, X — левый дифференциальный оператор, соответствующий элементу $x \in \mathfrak{g}$, действующий по формуле

$$Xu(\tau) = \frac{d}{dt} u(e^{tx}\tau) |_{t=0}. \quad (2)$$

Для уравнения (1) ставится задача Коши о нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$u(e) = u_0 \quad (e — единица группы G). \quad (3)$$

Решение этой задачи может быть записано в виде $u(\tau) = T(\tau)u_0$, где $T(\tau)$ — непрерывное представление группы G (см., например, ⁽²⁾).

Пусть на той же группе G задано другое уравнение

$$Xu(\tau) = A_1(x)u(\tau), \quad (1')$$

где $A_1(x)$ — также гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру $L(\mathbb{R}^n)$. Решение задачи Коши для этих уравнений будем обозначать $u(\tau, u_0)$ и $u_1(\tau, u_0)$ соответственно.

О п р е д е л е н и е. Уравнения (1) и (1') называются C^s -динамически эквивалентными, если существует такое гомеоморфное отображение $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n \setminus \theta$ на $\mathbb{R}^n \setminus \theta$ класса C^s , что при всех $\tau \in G, u_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо тождество

$$u(\tau, h(u_0)) = h \circ u_1(\tau, u_0). \quad (4)$$

Пользуясь представлением решения, это тождество можно записать в виде

$$T(\tau)h(u_0) = h \circ T_1(\tau)u_0, \quad (5)$$

где $T_1(\tau)$ — представление группы G , отвечающее уравнению (1'). Предполагая, что h является C^1 -динамической эквивалентностью, подставляя в (5) $e^{t\tau}$ вместо τ , дифференцируя по t при $t=0$ и полагая $\tau=0$, с помощью (2)

приходим к соотношению

$$A(x)h(u_0) = h'(u_0)A_1(x)u_0. \quad (6)$$

Обратно, можно показать, что если отображение $h(u)$ принадлежит классу C^1 в $\mathbb{R}^n \setminus \theta$ и удовлетворяет соотношению (6) при любом $u_0 \in \mathbb{R}^n$ и $x \in g$, то для него выполнены тождества (5), (4).

Предположим, что группа G разрешима и некоммутативна. Этим же свойством будет обладать ее алгебра Ли и, в частности, $[g, g] \neq 0$. Пусть $A_1(x)$ — некоммутативное представление алгебры g . Тогда найдутся такие элементы $x, y \in g$, что $[A_1(x), A_1(y)] = A_1[x, y] \neq 0$. Обозначим $[x, y] = z$. Пользуясь теоремой Ли о треугольном представлении разрешимой линейной алгебры Ли, легко увидеть, что оператор $A_1(z)$ нильпотентен. Оператор $A(z)$ также будет нильпотентен.

Из определения C^s -динамической эквивалентности вытекает, что она не будет нарушаться, если от представлений $A(x)$ и $A_1(x)$ перейти к эквивалентным им представлениям. Поэтому можно считать, что матрицы операторов $A(z)$ и $A_1(z)$ имеют нормальную жорданову форму. Введем обозначения: l (l_i) — число жордановых клеток в матрице $A(z)$ ($A_1(z)$); r_i — размерность i -й клетки матрицы $A(z)$, $r_i \geq 2$; p_i — размерность i -й клетки матрицы $A_1(z)$, $p_i \geq 2$; ω (ω_i) — число одномерных клеток матрицы $A(z)$ ($A_1(z)$).

Уравнение (6) можно записать в координатной форме, и тогда оно распадается на системы уравнений

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^{p_1-1} u_i \frac{\partial h_m}{\partial u_{i+1}} + \sum_{i=p_1+1}^{p_1+p_2-1} u_i \frac{\partial h_m}{\partial u_{i+1}} + \dots + \sum_{i=n-\omega_1+1}^{n-\omega_1-1} u_i \frac{\partial h_m}{\partial u_{i+1}}, \\
 h_m &= \sum_{i=1}^{p_1-1} u_i \frac{\partial h_{m+1}}{\partial u_{i+1}} + \sum_{i=p_1+1}^{p_1+p_2-1} u_i \frac{\partial h_{m+1}}{\partial u_{i+1}} + \dots + \sum_{i=n-\omega_1+1}^{n-\omega_1-1} u_i \frac{\partial h_{m+1}}{\partial u_{i+1}}, \quad (7) \\
 &\dots \\
 m+k-1 &= \sum_{i=1}^{p_1-1} u_i \frac{\partial h_{m+k}}{\partial u_{i+1}} + \sum_{i=p_1+1}^{p_1+p_2-1} u_i \frac{\partial h_{m+k}}{\partial u_{i+1}} + \dots + \sum_{i=n-\omega_1+1}^{n-\omega_1-1} u_i \frac{\partial h_{m+k}}{\partial u_{i+1}},
 \end{aligned}$$

где m принимает значения $1, r_1+1, r_1+r_2+1, \dots, \sum_{i=1}^{l-\omega-1} r_i+1$, а k — значения

где m принимает значения $1, r_1+1, r_1+r_2+1, \dots, \sum_{i=1}^k r_i+1$, а k — значения $r_1-1, r_2-1, \dots, r_{l-\omega}-1$ соответственно, и ω уравнений вида

$$0 = \sum_{i=1}^{p_1-1} u_i \frac{\partial h_{n-\omega+j}}{\partial u_{i+1}} + \sum_{i=p_1+1}^{p_1+p_2-1} u_i \frac{\partial h_{n-\omega+j}}{\partial u_{i+1}} + \dots + \sum_{i=n-\omega_1+1}^{n-\omega_1-1} u_i \frac{\partial h_{n-\omega+j}}{\partial u_{i+1}}, \quad (8)$$

где $j=1, \dots, \omega$.

Рассмотрим систему (7) при некоторых m, k . Обозначим через E_p линейную оболочку элементов из $\mathbf{R}^n$ вида

$$\{0, \dots, 0, u_{p_1}, 0, \dots, 0, u_{p_1+p_2}, 0, \dots, 0, u_{n-\omega_1}, u_{n-\omega_1+1}, \dots, u_n\},$$

через E_r

через $\begin{Bmatrix} 0, \dots, 0, u_{\tau_1}, 0, \dots, 0, u_{\tau_1+\tau_2}, 0, \dots, 0, u_{n-\omega}, u_{n-\omega+1}, \dots, u_n \end{Bmatrix}$

$$\{0, \dots, 0, u_k, 0, \dots, 0\}.$$

Из структуры уравнений (7), (8) видно, что при отображении $h(u)$ подпространство E_p переходит в подпространство E_r .

Лемма 1. Если уравнения (1) и (1') C^s -динамически эквивалентны, где $s \geq \max r_i - 1$, то сужение отображения $h(u)$ на подпространство E_p при-

надлежит классу $C_i^{s-\max_i r_i+1}$ (включая точку нуля).

Доказательство. Система (7) на подпространстве $\{e_{n-\omega_1-1}\} \oplus E_p$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= u_{n-\omega_1-1} \frac{\partial h_m}{\partial u_{n-\omega_1}}, \\ h_m &= u_{n-\omega_1-1} \frac{\partial h_m}{\partial u_{n-\omega_1}}, \\ &\dots \dots \dots \\ h_{m+k-1} &= u_{n-\omega_1-1} \frac{\partial h_{m+k}}{\partial u_{n-\omega_1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Эта система допускает при $u_{n-\omega_1-1} \neq 0$ решение в явном виде

$$h_{m+i} = \sum_{j=0}^i \frac{1}{(i-j)!} u_{n-\omega_1}^{i-j} \frac{\psi_{m+j}}{u_{n-\omega_1-1}^{i-j}}, \quad i=0, 1, \dots, k, \quad (10)$$

где функции ψ_{m+j} не зависят от переменной $u_{n-\omega_1}$. Если считать, что $u_{n-\omega_1} \neq 0$, то h_{m+i} , как функция всех остальных элементов, принадлежит классу C^s ; отсюда дифференцированием (10) по $u_{n-\omega_1}$ показывается, что функции $\psi_{m+j}/u_{n-\omega_1-1}^{k-j}$ допускают продолжение при $u_{n-\omega_1-1} = 0$ до функций, принадлежащих классу C^{s-k+j} , при всех значениях своих аргументов. Из формулы (10) тогда следует, что функции h_{m+i} принадлежат классу C^{s-k} на всем подпространстве $\{e_{n-\omega_1-1}\} \oplus E_p$ и, в частности, на подпространстве E_p .

Система (8) принимает на подпространстве $\{e_{n-\omega_1-1}\} \oplus E_p$ вид

$$0 = u_{n-\omega_1-1} \frac{\partial h_{n-\omega+j}}{\partial u_{n-\omega_1}}, \quad j=1, \dots, \omega.$$

Из нее вытекает, что функции $h_{n-\omega+j}$ не зависят от $u_{n-\omega_1}$ и, следовательно, принадлежат классу C^s на этом подпространстве. Лемма доказана.

Предположим выполненными условия леммы 1 при $s \geq \max_i r_i$; введем обозначения

$$h_0' = \lim_{\substack{|u| \rightarrow 0 \\ u \in E_p}} h'(u).$$

Применяя лемму 1 к обратному отображению h^{-1} , мы приходим к выводу, что существует

$$(h^{-1})_0' = \lim_{\substack{|u| \rightarrow 0 \\ u \in E_p}} (h^{-1})'(u).$$

Из соотношения $\det h'(u) \cdot \det (h^{-1})'(h(u)) = 1$ предельным переходом при $|u| \rightarrow 0, u \in E_p$, получается, что $\det h_0' \cdot \det (h^{-1})_0' = 1$. Таким образом, линейное отображение h_0' обратимо.

Теорема 1. Если уравнения (1) и (1') C^s -динамически эквивалентны, где $s \geq \max_i r_i + 1$, то они линейно эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим разложение $\mathbf{R}^n = E_p \oplus E_v$, и $u(u_p, u_q)$ и запишем уравнение (6) в виде

$$A(x)h(u_p, u_q) = h'(u_p, u_q)A_1(x)(u_p, u_q).$$

В этом равенстве зафиксируем $u_p \neq 0$ и разложим левую и правую части по формуле Тейлора в точке $u_q = 0$. Приравняв коэффициенты в обеих частях при членах первого и второго порядка малости относительно u_q ,

приходим к равенствам

$$A(x)h(u_p, 0) = h'(u_p, 0) A_1(x)(u_p, 0), \quad (11)$$

$$A(x)h'(u_p, 0)(0, u_q) = h'(u_p, 0)A_1(x)(0, u_q) + [h''(u_p, 0)(0, u_q)]A_1(x)(u_p, 0). \quad (12)$$

В силу леммы (1) в равенстве (12) можно перейти к пределу при $u_p \rightarrow 0$, тогда получим

$$A(x)h'_0(0, u_q) = h'_0 A_1(x)(0, u_q). \quad (13)$$

В силу условия, наложенного на s , функция $h(u_p, 0)$ принадлежит по крайней мере классу C^1 , поэтому, приравнявая дифференциалы левой и правой части (11) в точке $u_p = 0$, приходим к соотношению

$$A(x)h'_0(u_p, 0) = h'_0 A_1(x)(u_p, 0). \quad (14)$$

Объединяя (13), (14), получаем, что

$$A(x)h'_0 u = h'_0 A_1(x)u \quad (u \in \mathbb{R}^n),$$

т. е. уравнения (1) и (1') линейно эквивалентны. Теорема доказана.

Заметим, что в весьма частном случае утверждение, аналогичное теореме 1, было получено мною в 1973 г.

Автор благодарит С. Г. Крейна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Воронежский лесотехнический институт

Поступило
2 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1971. ² С. Г. Крейн, А. М. Шихватов, Функциональный анализ, т. 4, в. 1 (1970). ³ Н. Н. Ладис, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 9 (1973).