

А. Б. ХАРАЗИШВИЛИ

ОБ ОДНОМ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ
МЕРЫ ЛЕБЕГА

(Представлено академиком И. Н. Векун 11 VII 1975)

Хорошо известно, что при $n \geq 1$ существуют различные инвариантные несепабельные продолжения классической лебеговской меры l_n в n -мерном евклидовом пространстве E_n (см. ⁽¹⁾). Метод построения таких продолжений сводится в основном к расширению класса L_n всех измеримых по Лебегу частей E_n за счет добавления к этому классу почти инвариантных (относительно заранее фиксированной континуальной группы преобразований) подмножеств пространства E_n . Указанный метод имеет одну особенность: если μ — произвольная мера, полученная с его помощью, то на области определения μ может быть задан целый ряд других аналогичных μ продолжений l_n (см. ⁽¹⁾). Иными словами, здесь нарушается свойство единственности, столь характерное для меры Лебега. В связи с этим естественным образом возникает следующий вопрос: можно ли продолжить l_n до несепабельной инвариантной меры так, чтобы для последней свойство единственности все же сохраняло силу?

Ниже рассматривается одно продолжение l_n , обладающее этим свойством.

Пусть G — подгруппа группы D_n всех движений пространства E_n , содержащая всюду плотное в E_n множество параллельных переносов *. G -мерой назовем каждую G -инвариантную меру μ такую, что $\mu([0, 1]^n) = 1$. Ясно, что если μ — полная G -мера, то μ продолжает l_n .

Мы будем говорить, что G -инвариантная мера μ обладает свойством исчерпывания, если для любой μ -измеримой части X пространства E_n соотношение $\mu(X) > 0$ влечет существование такой последовательности $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ преобразований из G , что $\mu(E_n \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(X)) = 0$.

Оказывается, свойство единственности тесно связано со свойством исчерпывания. Легко показать, что при наличии первого из этих свойств необходимо выполняется и второе. С другой стороны, имеет место следующее

Предложение 1. Пусть G — подгруппа D_n , в которую входит несчетное всюду плотное в Π_n множество параллельных переносов, μ — невырожденная (т. е. не равная тождественно нулю) σ -конечная полная G -инвариантная мера со свойством исчерпывания. Если теперь μ' — произвольная σ -конечная G -инвариантная мера, заданная на области определения μ , то μ' отличается от μ лишь некоторым коэффициентом.

Отметим, что при доказательстве этого утверждения существенно используется классический результат Улама о неизмеримости в широком смысле кардинального числа $\aleph_1$ (см. ⁽²⁾).

Как непосредственное следствие предложения 1 получается единственность (с точностью до постоянного множителя) на L_n лебеговской меры l_n , если последнюю рассматривать в классе всех невырожденных σ -конечных D_n -инвариантных мер на пространстве E_n .

* Для удобства мы будем отождествлять посредством канонического изоморфизма пространство E_n с группой Π_n всех его трансляций.

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что в формулировке предложения 1 условие σ -конечности μ нельзя заменить менее ограничительным условием, состоящим в том, что всякое семейство μ -измеримых и взаимно непересекающихся подмножеств E_n со строго положительными мерами должно быть не более чем счетным.

Из сказанного выше вытекает, что утвердительный ответ на интересующий нас вопрос будет получен, коль скоро удастся построить несепарабельную меру, обладающую свойством исчерпывания.

Л е м м а 1. Пусть $n \geq 1$, φ — начальное порядковое число, соответствующее мощности континуума.

Тогда можно указать такую группу $\Gamma \subset \Pi_n$ и такие два семейства $(A_\xi^0)_{\omega \leq \xi < \varphi}$, $(A_\xi^1)_{\omega \leq \xi < \varphi}$ частей E_n , для которых будут справедливы приводимые ниже соотношения:

1. Γ является свободной группой с базисом $(x_\xi)_{\xi < \varphi}$.
2. $(\forall F) (F \text{ — замкнутое множество в } E_n \text{ с } l_n(F) > 0 \Rightarrow \text{Card}(F \cap (\bigcup_{\xi < \varphi} \{x_\xi\})) = 2^{k_0})$.

3. Последовательность векторов $(x_\xi)_{0 \leq \xi < \omega}$ всюду плотна в E_n .

4. Для каждого ординального числа ξ из промежутка $[\omega, \varphi[$ обозначим через H_ξ нормальный делитель индекса 2 в группе Γ , образованный теми элементами Γ , в разложениях которых по базису $(x_\xi)_{\xi < \varphi}$ коэффициенты при x_ξ — четные целые числа. Тогда $(\forall h) (h \in H_\xi \Rightarrow (\text{Card}(A_\xi^0 \Delta h(A_\xi^0)) < 2^{k_0} \& \text{Card}(A_\xi^1 \Delta h(A_\xi^1)) < 2^{k_0}))$ и $(\forall h) (h \in \Gamma \setminus H_\xi \Rightarrow (\text{Card}(A_\xi^0 \Delta h(A_\xi^1)) < 2^{k_0} \& \text{Card}(A_\xi^1 \Delta h(A_\xi^0)) < 2^{k_0}))$; в частности, объединение $A_\xi^0 \cup A_\xi^1$ представляет собой почти Γ -инвариантное подмножество E_n .

5. $(\forall \xi) (\omega \leq \xi < \varphi \Rightarrow A_\xi^0 \cap A_\xi^1 = \emptyset)$.

6. $(\forall \xi) (\forall \zeta) (\omega \leq \xi < \varphi \& \omega \leq \zeta < \varphi \Rightarrow A_\xi^0 \cup A_\xi^1 = A_\zeta^0 \cup A_\zeta^1)$.

7. Если $(\xi_k)_{k \in N}$ — любое инъективное счетное семейство порядковых чисел, принадлежащих интервалу $[\omega, \varphi[$, то пересечение $\bigcap_{k \in N} A_{\xi_k}^{1/k}$, $i_k = 0, 1$,

служит l_n -массивным множеством в E_n . Более того, это пересечение имеет континуальную общую часть с произвольным замкнутым подмножеством E_n строго положительной борелевской меры.

Наметим коротко доказательство сформулированной леммы. Во-первых, сразу же видно, что группу Γ легко можно определить методом трансфинитной индукции. Далее, согласно одному результату Тарского, существует φ -последовательность $(J_\xi)_{\omega \leq \xi < \varphi}$ множеств, содержащихся в промежутке $[0, \varphi[$ и таких, что для всякого счетного семейства $(\xi_k)_{k \in N}$ попарно различных ординальных чисел из $[\omega, \varphi[$ пересечение $\bigcap_{k \in N} I_k$, где I_k

есть либо J_{ξ_k} , либо $[0, \varphi[\setminus J_{\xi_k}$, является континуальной частью $[0, \varphi[$. Обозначим через P класс пересечений $\bigcap_{k \in N} I_k$, отвечающих всевозможным

инъективным последовательностям $(\xi_k)_{k \in N}$. Пусть теперь $(F_\xi)_{\xi < \varphi}$ — семейство замкнутых подмножеств пространств E_n , удовлетворяющее следующим соотношениям:

- 1) $(\forall \xi) (\xi < \varphi \Rightarrow l_n(F_\xi) > 0)$;

2) $(\forall J) (J \in P \Rightarrow \text{частичное семейство } (F_\xi)_{\xi \in J} \text{ состоит из всех замкнутых множеств в } E_n, \text{ имеющих строго положительную меру, причем каждое } F_\xi \text{ встречается в } (F_\xi)_{\xi \in J} \text{ континуальное число раз})$.

Трансфинитной индукцией без труда строится φ -последовательность $(X_\xi)_{\xi < \varphi}$ частей E_n , для которой выполняются приводимые ниже свойства;

- (1) $(\forall \xi) (\forall \zeta) (0 \leq \xi < \varphi \& 0 \leq \zeta < \varphi \& \xi \neq \zeta \Rightarrow X_\xi \cap X_\zeta = \emptyset)$.

- (2) $(\forall \xi) (0 \leq \xi < \varphi \Rightarrow F_\xi \cap X_\xi \neq \emptyset)$.

(3) $(\forall \xi) (0 \leq \xi < \varphi \Rightarrow X_\xi \text{ представляет собой некоторый класс интранзитивности группы } \Gamma_\xi, \text{ порожденной семейством векторов } (x_\eta)_{\eta \leq \xi})$.

Введем обозначение $H_\xi^1 = H_\xi \cap \Gamma_\xi$, где Γ_ξ , как и в соотношении (3), — группа трансляций E_n с системой образующих $(x_\eta)_{\eta \leq \xi}$. Очевидно, что при $\zeta \geq \xi$ H_ξ^1 является нормальным делителем индекса 2 в Γ_ζ . Выберем под

конец какую-нибудь систему представителей $(a_\xi)_{\xi < \Phi}$ для семейства $(X_\xi \cap F_\xi)_{\xi < \Phi}$ и положим

$$A_\xi^0 = \left(\bigcup_{\zeta \in J_\xi} H_\xi^\zeta(a_\zeta) \right) \cup \left(\bigcup_{\zeta \in [0, \Phi[\setminus J_\xi} (X_\zeta \setminus H_\xi^\zeta(a_\zeta)) \right),$$

$$A_\xi^1 = \left(\bigcup_{\zeta \in [0, \Phi[\setminus J_\xi} H_\xi^\zeta(a_\zeta) \right) \cup \left(\bigcup_{\zeta \in J_\xi} (X_\zeta \setminus H_\xi^\zeta(a_\zeta)) \right).$$

Немедленно проверяется, что определенные таким способом множества A_ξ^0 и A_ξ^1 , $\omega \leq \xi < \Phi$, удовлетворяют нужным условиям.

Рассмотрим теперь алгебру подмножеств пространства E_n , порожденную объединением $L_n \cup \left(\bigcup_{\omega \leq \xi < \Phi} \{A_\xi^0, A_\xi^1\} \right)$. Эта алгебра есть не что иное, как класс частей E_n вида

$$\left(\bigcup_{i \in \Phi} (A_{\xi_i}^{f(1)} \cap \dots \cap A_{\xi_p}^{f(p)} \cap Y_i) \right) \cup (B \cap Y),$$

где $(\xi_k)_{1 \leq k \leq p}$ — конечная инъективная последовательность порядковых чисел из промежутка $[\omega, \Phi[$, Φ — множество всех отображений $\{1, 2, \dots, p\}$ в $\{0, 1\}$, Y_i ($i \in \Phi$) и Y — произвольные измеримые в смысле Лебега подмножества E_n , B — дополнение к $\bigcup_{\xi < \Phi} X_\xi$. На указанной алгебре можно задать функцию μ с помощью следующей формулы:

$$\mu \left(\left(\bigcup_{i \in \Phi} (A_{\xi_i}^{f(1)} \cap \dots \cap A_{\xi_p}^{f(p)} \cap Y_i) \right) \cup (B \cap Y) \right) = \frac{1}{2^p} \sum_{j \in \Phi} l_n(Y_j).$$

Корректность определения μ вытекает из l_n -массивности каждого пересечения $A_{\xi_1}^{f(1)} \cap \dots \cap A_{\xi_p}^{f(p)}$. Кроме того, ясно, что отображение μ служит продолжением лебеговской меры l_n . Весьма просто устанавливается также

Лемма 2. Пусть $F(E_n)$ означает класс неконтинуальных частей пространства E_n .

Тогда функция μ единственным образом продолжается до Γ -инвариантной меры $\bar{\mu}$, задаваемой на σ -алгебре, системой образующих которой является объединение $F(E_n) \cup L_n \cup \left(\bigcup_{\omega \leq \xi < \Phi} \{A_\xi^0, A_\xi^1\} \right)$.

Наконец, имеет место

Предложение 2. Γ -мера $\bar{\mu}$ обладает свойством исчерпывания.

Последнее утверждение легче всего доказывается, исходя из того факта, что свойство исчерпывания, очевидно, справедливо для отображения μ , а $\bar{\mu}$ получается из μ обычным лебеговским процессом продолжения меры с кольца на порождаемое им σ -кольцо при помощи покрытий множеств, лежащих в E_n , счетными семействами элементов из области определения μ ; поэтому в данном случае свойство исчерпывания сохраняется при переходе от μ к $\bar{\mu}$.

Обозначим теперь через Δ_n единичный координатный куб в пространстве E_n , и пусть ρ — псевдометрика, ассоциированная с мерой $\bar{\mu}$. Легко проверяется, что расстояние (относительно ρ) между любыми двумя различными множествами семейства $(A_\xi^0 \cap \Delta_n)_{\omega \leq \xi < \Phi}$ есть $1/2$. Следовательно, топологический вес метрического пространства, ассоциированного с ρ , равен мощности континуума, и тем самым установлена несепарабельность меры $\bar{\mu}$.

Замечание 1. Техника продолжений лебеговской меры посредством соответствующих расширений класса L_n за счет почти G -инвариантных частей E_n обладает также еще одной особенностью: если λ — произвольная G -мера, полученная с помощью этого метода, то для всякого λ -измеримого, имеющего строго положительную меру подмножества X пространства E_n

найдется такая окрестность U единичного элемента топологической группы D_n , что будет выполняться соотношение $g \in U \cap G \Rightarrow \lambda(g(X) \cap X) > 0$. Другими словами, множество X нельзя вывести из самого себя, если на него действовать преобразованиями из G , достаточно близкими к тождественному движению E_n . Это свойство устойчивости измеримых множеств со строго положительными мерами уже перестает быть верным для μ . В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует параллельный перенос h из группы Γ , по норме не превосходящий ε и такой, что $h(A_\omega^0) \cap A_\omega^0 = \emptyset$. В связи со сказанным отметим также, что если принять гипотезу о неизмеримости в широком смысле кардинала $2^{\aleph_0}$, то нетрудно будет доказать, что каждая G -мера в евклидовом пространстве E_n , для которой справедливо приведенное свойство устойчивости, является строго продолжимой с сохранением этого свойства.

З а м е ч а н и е 2. При $n \geq 1$ сепарабельные D_n -инвариантные продолжения меры l_n , удовлетворяющие свойству исчерпывания, можно строить без привлечения техники, связанной с рассмотрением почти D_n -инвариантных частей E_n (см. (3)).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Kakutani, J. Oxtoby, Ann. Math., v. 52 (1950). ² S. Ulam, Fund. Math., v. 16 (1930). ³ А. Б. Харазисвили, ДАН, т. 220, № 1 (1975).