

А. Г. ЧЕНЦОВ

К ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 15 IX 1975)

Работа примыкает к исследованиям ⁽¹⁻⁷⁾. Рассматривается процедура построения множеств позиционного поглощения ^(1, 6, 7), устанавливается связь позиционного и программного поглощения ^(1, 8, 9).

1. Рассматривается конфликтно управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad (1)$$

где $t \in R^1$, $x \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$. Предполагается, что $P \in \text{comp}(R^p)$, $Q \in \text{comp}(R^q)$. Пусть, кроме того, заданы числа $\theta_0 > t_0$, и замкнутые множества $M \subset T \times R^n$, $N \subset T \times R^n$, где $T = [t_0, \theta_0]$.

Относительно функции f будем предполагать, что f непрерывна на $R^1 \times R^n \times P \times Q$ и для любого $K \in \text{comp}(R^n)$ удовлетворяет на $T \times K \times P \times Q$ условию Липшица по x с некоторой постоянной Липшица $\Lambda(K) > 0$. Кроме того, будем предполагать выполненным следующее условие равномерной продолжимости решений: для любого $K \in \text{comp}(R^n)$ найдется число $\beta > 0$, для которого при всех $(\bar{t}, \bar{x}) \in T \times K$, $\theta \in [\bar{t}, \theta_0]$ и $\eta \in \{\mathcal{H}_\lambda, [\bar{t}, \theta]\}$ найдется такая абсолютно непрерывная функция $x(\cdot): [\bar{t}, \theta] \rightarrow R^n$, для которой при всех $t \in [\bar{t}, \theta]$ $\|x(t)\|_n \leq \beta$,

$$x(t) = \bar{x} + \int_{[\bar{t}, t] \times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v) \eta(d\xi \times du \times dv). \quad (2)$$

Здесь $\{\mathcal{H}_\lambda, [\bar{t}, \theta]\}$ множество допустимых программных управлений на отрезке $[\bar{t}, \theta]$ (см. ^(8, 9)), $\|\cdot\|_n$ — евклидова норма в R^n . При сделанных предположениях функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая (2), единственна. Ниже будем обозначать ее $\varphi(\cdot, \bar{t}, \bar{x}, \eta)$ и называть программным движением ^(8, 9), порожденным управлением η из позиции $(\bar{t}, \bar{x})$.

Квазипрограммой Γ игрока на отрезке $[t_1, t_2] \subset T$ назовем всякую функцию

$$\alpha: \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\} \rightarrow 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_1, t_2]\}},$$

удовлетворяющую приведенным ниже условиям (A.1) — (A.4). Здесь $\{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$ множество программных управлений Π игрока ^(8, 9) на отрезке $[t_1, t_2]$.

(A.1) При всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$ множество $\alpha(v)$ непусто.

(A.2) $\alpha(v) \subset \{\Pi(v), [t_1, t_2]\}$ для каждого программного управления $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$.

(A.3) Пусть $v_i \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$, $i=1, 2$, и момент $\tau \in [t_1, t_2]$ таковы, что при всех

$$D \in \mathcal{D}_{t_1, t_2} \cap ([t_1, \tau] \times Q) \quad v_1(D) = v_2(D).$$

Тогда $\alpha(v_1)|_{[t_1, \tau]} = \alpha(v_2)|_{[t_1, \tau]}$: для каждого $\eta^{(1)} \in \alpha(v_1)$ существует такое $\eta^{(2)} \in \alpha(v_2)$, что при всех $H \in \mathcal{E}_{t_1, t_2} \cap ([t_1, \tau] \times P \times Q)$ $\eta^{(1)}(H) = \eta^{(2)}(H)$, и для каждого $\eta_2 \in \alpha(v_2)$ существует $\eta_1 \in \alpha(v_1)$, для которого при всех $H \in \mathcal{E}_{t_1, t_2} \cap ([t_1, \tau] \times P \times Q)$ $\eta_1(H) = \eta_2(H)$.

(A.4) $\bigcup_{\{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}} \alpha(v)$ суть *-слабо замкнутое подмножество $\{\mathcal{H}_\lambda, [t_1, t_2]\}$.

В условиях (A.1) — (A.4) $\{\Pi(v), [t_1, t_2]\}$ программа (^{8, 9}), порожденная управлением $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$; $\mathcal{D}_{t_1}^{t_2}$ и $\mathcal{E}_{t_1}^{t_2}$ σ -алгебры борелевских подмножеств $[t_1, t_2] \times Q$ и $[t_1, t_2] \times P \times Q$ соответственно; для произвольного класса $\mathcal{L}$ подмножеств некоторого множества E и множества $A \in 2^E$ (2^E класс всех подмножеств E) $\mathcal{L} \cap A$ суть класс всех множеств $X \cap A$, где $X \in \mathcal{L}$. Функции α , удовлетворяющие (A.1) — (A.3), будем называть здесь квазистратегиями I игрока на отрезке $[t_1, t_2]$.

Рассмотрим задачу о нахождении множества всех позиций $(t, x) \in T \times \times R^n$, для каждой из которых найдется такая квазипрограмма α^0 I игрока на отрезке $[t, \theta_0]$, что при всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\}$ и $\eta \in \alpha^0(v)$ найдется момент $\tau \in [t, \theta_0]$, для которого $(\tau, \varphi(\tau, t, x, \eta)) \in M$ и при всех $t \in [t, \tau]$ $(t, \varphi(t, t, x, \eta)) \in N$. Ниже исследуется решение этой задачи и устанавливается связь этого решения с понятием максимального u -стабильного моста в игровой позиционной задаче наведения на множество M внутри N (см. (^{1, 6})).

2. Пусть $\mathcal{P}_N$ — класс всех замкнутых подмножеств N . Введем оператор $A: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$ программного поглощения, положив по определению для любого множества $E \in \mathcal{P}_N$ множество $A(E)$ состоящим из всех позиций $(t, x) \in E$, для каждой из которых при любом выборе $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\}$ найдутся $\eta \in \{\Pi(v), [t, \theta_0]\}$ и $\tau \in [t, \theta_0]$, для которых $(\tau, \varphi(\tau, t, x, \eta)) \in M$ и при всех $\xi \in [t, \tau]$ выполняется включение $(\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in E$. Итак $A(E)$ суть множество программного поглощения целевого множества M при фазовых ограничениях E . Символ A^k при всяком $k \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ обозначает ниже соответствующую степень оператора A .

Введем оператор $A^\infty: \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_N$ позиционного поглощения, положив по определению $A^\infty(E) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} A^k(E)$ при всех $E \in \mathcal{P}_N$.

Будем обозначать ниже для каждого $k \in \mathcal{N}_0$ $\mathcal{W}^{(k)} = A^k(N)$ и $\mathcal{W} = A^\infty(N)$. Таким образом при всех $k \in \mathcal{N}_0$ $\mathcal{W}^{(k+1)} \subset \mathcal{W}^{(k)}$ и $\mathcal{W} = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathcal{W}^{(k)}$ суть монотонный предел последовательности $(\mathcal{W}^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0}$.

В пространстве $\mathcal{P}_N$ определим уравнение $A(E) = E$ программного поглощения. Множество всех решений этого уравнения будем обозначать $\mathcal{L}$. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 1. Множество $\mathcal{W}$ содержится в $\mathcal{L}$: $\mathcal{W} = A(\mathcal{W})$.

Л е м м а 2. Пусть $(t, x) \in \mathcal{W}$ и функция

$$\alpha^0: \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\} \rightarrow 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t, \theta_0]\}}$$

определяется условием: для каждого $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\}$ $\alpha^0(v)$ множество всех $\eta^0 \in \{\Pi(v), [t, \theta_0]\}$, для каждого из которых существует такой момент $\tau_0 \in [t, \theta_0]$, что $(\tau_0, \varphi(\tau_0, t, x, \eta^0)) \in M$ и при всех $t \in [t, \tau_0]$ $(t, \varphi(t, t, x, \eta^0)) \in \mathcal{W}$.

Тогда α^0 суть квазипрограмма I игрока на отрезке $[t, \theta_0]$, причем для каждого $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\}$, $\eta \in \alpha^0(v)$ существует момент $\tau \in [t, \theta_0]$, для которого $(\tau, \varphi(\tau, t, x, \eta)) \in M$ и $(t, \varphi(t, t, x, \eta)) \in N$ при всех $t \in [t, \tau]$.

Л е м м а 3. Для каждого $k \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ из условия $(t, x) \in (T \times R^n) \setminus \mathcal{W}^{(k)}$ следует, что для каждой квазистратегии α I игрока на отрезке $[t, \theta_0]$ существуют такие программные управления $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\}$ и $\eta \in \alpha(v)$, что для всякого $\tau \in [t, \theta_0]$ при условии $(\tau, \varphi(\tau, t, x, \eta)) \in M$ найдется момент $t \in [t, \tau]$, для которого $(t, \varphi(t, t, x, \eta)) \notin N$.

Из лемм 2 и 3 вытекает

Т е о р е м а 1. Множество $\mathcal{W}$ совпадает с множеством всех позиций $(t, x) \in T \times R^n$, для каждой из которых существует квазистратегия α игрока, для которой при каждом $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \theta_0]\}$, $\eta \in \alpha(v)$ существует такой момент $\tau \in [t, \theta_0]$, что справедливы включения

$$(\tau, \varphi(\tau, t, x, \eta)) \in M, \quad (3)$$

$$(\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \quad (4)$$

для всех $\xi \in [t, \tau]$. При условии $(t, x) \in \mathcal{W}$ реализация включений (3), (4) достигается в классе квазипрограмм.

Заметим, что класс $\mathcal{L}_*$, вообще говоря, может содержать более одного множества. Пример подобной ситуации доставляет скалярная система

$$\begin{aligned} dx/dt &= u+v, \quad P = [-1, +1], \quad Q = [-1, +1], \quad t_0=0, \quad \vartheta_0=1, \\ M &= \{1\} \times [-m_0, m_0], \quad N = [0, 1] \times R^1, \quad m_0 > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Действительно, например, множества $E_1 = \{(t, 0), t \in [0, 1]\}$, $E_2 = \{(t, x): t \in [0, 1], |x| \leq m_0\}$, не совпадающие между собой, содержатся в $\mathcal{L}_*$. Вместе с тем оператор A характеризует $\mathcal{W}$ однозначно, несмотря на вышеописанную некорректность задачи $E = A(E)$. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. Множество $\mathcal{W}$ является наибольшим элементом частично упорядоченного множества $(\mathcal{L}_*, \subset)$: при всех $E \in \mathcal{L}_*$ выполняется включение $E \subset \mathcal{W} \in \mathcal{L}_*$.

В примере (5) множество E_2 совпадает с $\mathcal{W}$. Отметим, что в случае, когда при всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$ сечения $M(t) = \{x: x \in R^n, (t, x) \in M\}$ множества M пусты, для всякого $k \in \mathcal{N}_0$ выполняется соотношение $A^{k+1}(N) = \mathcal{W}^{(k+1)} = B^k(W)$, где $W = \mathcal{W}^{(1)} = A(N)$, и оператор $B: \mathcal{P}_N \rightarrow 2^N$ удовлетворяет условию: для каждого $E \in \mathcal{P}_N$ множество $B(E)$ состоит из всех позиций $(t, x) \in E$, для которых при всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t, \vartheta_0]\}$ найдется такое $\eta \in \{\Pi(v), [t, \vartheta_0]\}$, что $(\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in E$ при всех $\xi \in (t, \vartheta_0]$.

Заметим также, что в случае, когда $N = T \times R^n$, а $M \subset T \times R^n$ замкнутое множество общего вида, при условии $\mathcal{W} = W = A(T \times R^n)$ нахождение множества $\mathcal{W}$ сводится к решению программных задач наведения на M без фазовых ограничений. Если, кроме того, $M(t) = \emptyset$ при всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$, то решение программной задачи наведения на M из позиции (t_*, x_*) сводится к проверке условия $\mathcal{G}(\vartheta_0, t_*, x_*, v) \cap M(\vartheta_0) \neq \emptyset$ при всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$, которая существенно упрощается в линейном случае ⁽¹⁾ за счет использования элементов выпуклого анализа в конечномерных пространствах; здесь $\mathcal{G}(\vartheta_0, t_*, x_*, v)$ область достижимости для программы $\{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$ из позиции (t_*, x_*) в момент ϑ_0 .

3. Рассмотрим решение задачи наведения в классе позиционных процедур управления ^(1, 6, 7). При этом мы будем рассматривать здесь контрстратегии U_v и стратегии U игрока, определяемые аналогично ⁽⁹⁾. Будем обозначать $\mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U_v)$ и $\mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U)$ множества всех движений ⁽⁹⁾, порожденных контрстратегией U_v и стратегией U соответственно из начальной позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$.

Рассмотрим задачу о нахождении множества всех позиций $(t_*, x_*) \in T \times R^n$, для каждой из которых существует контрстратегия U_v , а при допущении предположении ⁽¹⁾ о том, что при всех $s \in R^n$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $x \in R^n$,

$$\min_P \max_Q s'f(t, x, u, v) = \max_Q \min_P s'f(t, x, u, v), \quad (6)$$

стратегия U , гарантирующие наведение всех движений $x[\cdot] \in \mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U_v)$ ($x[\cdot] \in \mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U)$) на множество M внутри N . С учетом леммы 1 можно показать, что справедлива следующая

Лемма 4. Для всякой позиции $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, момента $\vartheta \in (t_*, \vartheta_0]$ и программного управления $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$ II игрока существует такое $\eta^0 \in \{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$, что для каждого момента $t \in [t_*, \vartheta]$, удовлетворяющего условию

$$(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \eta^0)) \notin M$$

при всех $\xi \in [t_*, t]$, справедливо включение

$$(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta^0)) \in \mathcal{W}.$$

Из леммы 4 следует, что $\mathcal{W}$ u -стабильное (относительно M и N) множество ⁽¹⁾. Поэтому при условии $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$ задача наведения на M внутри N разрешается, например, с помощью контрстратегии, а при условии (6) стратегии, экстремальной ⁽¹⁾ к $\mathcal{W}$. С другой стороны, для каждой позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ и контрстратегии U_v функция $\Pi(\cdot | U_v, t_*, x_*)$, значениями которой при всех $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta_0]\}$ являются множества всех $\eta \in \{\Pi(v), [t_*, \vartheta_0]\}$, для которых $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \in \mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U_v)$ является квазистратегией I игрока на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Поэтому с учетом теоремы 1 и леммы 4 аналогично ^(1, 2) можно показать, что справедлива

Теорема 3. Множество $\mathcal{W}$ совпадает с множеством всех позиций $(t_*, x_*) \in T \times R^n$, для каждой из которых существует контрстратегия U_v^0 , а при условии (6) стратегия U^0 , для которых при любом выборе $x[\cdot] \in \mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U_v^0)$ и $x[\cdot] \in \mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U^0)$, соответственно, найдется такой момент $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$, что $(\tau, x[\tau]) \in M$ и $(t, x[t]) \in N$ при всех $t \in [t_*, \tau]$.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
4 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры. М., 1974. ² Л. С. Понтрягин, ДАН, т. 174, № 6 (1967). ³ Л. С. Понтрягин, ДАН, т. 175, № 4 (1967). ⁴ Б. Н. Пшеничный, ДАН, т. 184, № 2 (1969). ⁵ E. Roxin, J. Opt. Theory and Appl., v. 3, № 3 (1969). ⁶ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, т. 34, № 6 (1970). ⁷ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, т. 35, № 1 (1971). ⁸ А. Г. Ченцов, ДАН, т. 215, № 4 (1974). ⁹ А. Г. Ченцов, О структуре одной игровой задачи сближения, ДАН, т. 224, № 6 (1975).