

Ю. М. РЯБУХИН

О СЧЕТНО-ПОРОЖДЕННЫХ ЛОКАЛЬНО Ж-АЛГЕБРАХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 14 X 1975)

В настоящей работе мы укажем одну конструкцию, позволяющую строить счетно-порожденные локально-нильпотентные алгебры, кольца и группы, локально разрешимые алгебры, кольца и группы, локально-конечные группы, кольца и алгебры над конечным полем и ряд других счетно-порожденных универсальных алгебр, локально обладающих некоторыми свойствами. При этом введенная конструкция обладает свойством «универсальности». Так, например, применяя ее к ассоциативным локально-нильпотентным алгебрам, мы связываем с каждым отображением $f: N \rightarrow N$ множества N всех натуральных чисел в себя некоторую счетно-порожденную локально-нильпотентную алгебру $\mathfrak{A}(f)$. Доказывается, что если f — неограниченная возрастающая функция, то любая счетно-порожденная локально-нильпотентная алгебра является гомоморфным образом $\mathfrak{A}(f)$.

1. Выберем и зафиксируем произвольную систему Ω алгебраических операций, содержащую точно одну нульварную операцию $\circ$ (см. (1), стр. 107—108). Для любой Ω -алгебры A ((1), стр. 109) будем обозначать символом $\circ$ элемент, выделенный этой нульварной операцией $\circ$. Если $\{a_i | i \in I\}$ — непустое подмножество в Ω -алгебре A , то символом $\langle a_i | i \in I \rangle$ будем обозначать подалгебру в A , порожденную указанным множеством элементов. Для любого гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ Ω -алгебр обозначим символом κ_φ соответствующую конгруэнцию в A , т. е. $\kappa_\varphi = \{(x, y) \in A \times A | x\varphi = y\varphi\}$. Хорошо известно, что при этом $\varphi(A) \approx A/\kappa_\varphi$. Если θ — конгруэнция в A , то ее образ $\varphi(\theta) = \{(x\varphi, y\varphi) | (x, y) \in \theta\}$ при гомоморфизме φ будет конгруэнцией Ω -алгебры $\varphi(A)$. Можно делать и обратный переход от конгруэнций в A к их полным прообразам — конгруэнциям в A , содержащим κ_φ . Эти и подобные утверждения из теории гомоморфизмов универсальных алгебр мы будем считать известными (см., например, (2), стр. 60—69). Кроме того будем считать известными основные свойства многообразий универсальных алгебр и свободных алгебр многообразий.

Выберем и зафиксируем любое такое многообразие U Ω -алгебр, что в любой Ω -алгебре из U подалгебра $\langle \circ \rangle$ одноэлементна. Это равносильно выполнению тождеств $\circ \dots \circ \omega = \circ$ для всех $\omega \in \Omega$. Все рассматриваемые ниже Ω -алгебры — это Ω -алгебры из U , а все рассматриваемые классы Ω -алгебр — непустые подклассы в U , замкнутые относительно изоморфизмов. В частности, все рассматриваемые ниже многообразия — подмногообразия в U .

Символом N мы всегда будем обозначать множество всех натуральных чисел, т. е. целых чисел $i \geq 1$. В частности, Ω -алгебра A называется счетно-порожденной, если $A = \langle a_i | i \in N \rangle$ для некоторых элементов a_i . Элементы a_i не обязаны быть различными и потому, по определению, все конечно-порожденные алгебры тоже считаются счетно-порожденными. Среди всех счетно-порожденных Ω -алгебр выделим и зафиксируем одну — свободную Ω -алгебру $\mathfrak{A}$ (т. е. свободную Ω -алгебру многообразия U !) с множеством

$$X = \{x_i | i \in N\}, \quad x_i = x_j \Leftrightarrow i = j, \quad (1)$$

свободных образующих.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный класс Ω -алгебр. Будем говорить, что Ω -алгебра R является локально $\mathfrak{M}$ -алгеброй, если все конечно-порожденные подалгебры в R принадлежат классу $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. Пусть дана возрастающая цепь

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{M}_n \subseteq \dots, \quad n \in N, \quad (2)$$

многообразий в $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in N} \mathfrak{M}_i$.

Тогда существует такая счетно-порожденная локально $\mathfrak{M}$ -алгебра R , что все счетно-порожденные локально $\mathfrak{M}$ -алгебры являются гомоморфным образом R .

Для доказательства теоремы свяжем с каждой Ω -алгеброй A и каждым натуральным числом n конгруэнцию в A

$$\tau_n(A) = \cap \{ \theta \mid A / \theta \in \mathfrak{M}_n \}. \quad (3)$$

Затем связываем с каждой функцией $f: N \rightarrow N$ (т. е. отображением множества N натуральных чисел в себя) конгруэнцию

$$\theta_f = (\tau_{f(n)} < x_i \mid 1 \leq i \leq n > \mid n \in N) \quad (4)$$

свободной Ω -алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную указанным множеством бинарных отношений на $\mathfrak{A}$. Интересующей нас конструкцией является фактор-алгебра $\mathfrak{A}_f = \mathfrak{A} / \theta_f$, соответствующая этой конгруэнции θ_f .

Из (1) — (4) легко вытекает, что для любой функции $f: N \rightarrow N$ $\mathfrak{A}_f$ является счетно-порожденной локально $\mathfrak{M}$ -алгеброй и что любая счетно-порожденная локально $\mathfrak{M}$ -алгебра является гомоморфным образом некоторой Ω -алгебры $\mathfrak{A}_h$ для подходящей возрастающей функции $h: N \rightarrow N$. После этого доказывается, что если f — неограниченная возрастающая функция, то для любой возрастающей функции h Ω -алгебра $\mathfrak{A}_h$ является гомоморфным образом $\mathfrak{A}_f$. Но тогда, очевидно, алгеброй R , искомой в теореме 1, является, например, Ω -алгебра $\mathfrak{A}_\varepsilon$, где $\varepsilon(n) = n$ для всех $n \in N$.

Теорема 2. Пусть система Ω конечна.

Тогда существует такая счетно-порожденная локально конечная Ω -алгебра R , что любая счетно-порожденная локально-конечная Ω -алгебра является гомоморфным образом R .

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_n$ — многообразие, порожденное классом всех таких конечных Ω -алгебр A , что множество A имеет не более $n+1$ элемента, $n \in N$. Из известных результатов о порождении многообразий (см. (2), теоремы 2—4 на стр. 358—361) вытекает, что все многообразия $\mathfrak{F}_n$ локально-конечны, т. е. состоят только из локально-конечных Ω -алгебр. Но тогда нетрудно заметить, что локально $\mathfrak{F}$ -алгебры — это в точности локально-конечные Ω -алгебры. Остается применить теорему 1 к цепи многообразий $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}_n \subseteq \dots$, $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in N} \mathfrak{F}_i$.

Мы потребовали от основного многообразия U выполнения только одного условия: в любой Ω -алгебре A из U подалгебра $\langle o \rangle$ одноэлементна. Этому условию удовлетворяют многие известные многообразия, например, все многообразия групп, колец, модулей, алгебр (линейных) над полем, подгрупп или группоидов с нулем или единицей, решеток с наибольшим или наименьшим элементом и т. д. Поэтому ко всем этим многообразиям можно применять теорему 1, 2.

2. Из доказательства теоремы 1 получается конструкция соответствующей «универсальной» локально $\mathfrak{M}$ -алгебры. Ясно, что эта конструкция будет более или менее «конструктивной» в зависимости от того, как заданы соответствующие многообразия $\mathfrak{M}_n$.

Применим, например, полученные результаты к ассоциативным локально нильпотентным алгебрам.

Пусть U — многообразие всех ассоциативных алгебр над некоторым полем Φ . Никаких ограничений на поле Φ не налагается. В рассматривае-

мом нами случае $\mathfrak{M}$ — класс всех нильпотентных алгебр. Возьмем в качестве многообразия $\mathfrak{M}_k$ многообразие всех $(k+1)$ -нильпотентных алгебр, т. е. таких алгебр A , что $A^{k+1}=0$. Вместо конгруэнции $\tau_n(A)$ мы получаем идеал A^{n+1} , а вместо конгруэнции θ_f — идеал

$$\mathcal{I}(f) = (\langle x_i | 1 \leq i \leq n \rangle^{1+f(n)} | n \in N) \quad (5)$$

свободной алгебры $\mathfrak{A}$, порожденный указанной системой подалгебр. Для любой функции $f: N \rightarrow N$ обозначим $\mathfrak{E}(f) = \mathfrak{A} / \mathcal{I}(f)$ и рассмотрим получающиеся счетно-порожденные локально-нильпотентные алгебры $\mathfrak{E}(f)$ более подробно.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Предложение 1. Если f — неограниченно возрастающая функция, то алгебра $\mathfrak{E}(f)$ будет такой счетно-порожденной локально-нильпотентной алгеброй, что любая счетно-порожденная локально-нильпотентная алгебра является гомоморфным образом алгебры $\mathfrak{E}(f)$.

С помощью ряда лемм устанавливается более тесная связь между свойствами функции f и соответствующей локально-нильпотентной (ассоциативной!) алгебры $\mathfrak{E}(f)$.

Предложение 2. Алгебра $\mathfrak{E}(f)$ первична тогда и только тогда, когда функция f неограничена. Алгебра $\mathfrak{E}(f)$ нильпотентна тогда и только тогда, когда функция f ограничена. Если функция f постоянна и $f(n)=k$ для всех $n \in N$, то $\mathfrak{E}(f)$ — свободная счетно-порожденная $(k+1)$ -нильпотентная алгебра.

Предложение 3. Пусть даны две функции $f: N \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow N$.

Тогда включение $\mathcal{I}(f) \subseteq \mathcal{I}(g)$ равносильно неравенству $f \geq g$. В частности, алгебры $\mathfrak{E}(f)$ и $\mathfrak{E}(g)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают функции f и g .

Теорема 3. Пусть $f: N \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow N$ — произвольные возрастающие функции. Алгебры $\mathfrak{E}(f)$ и $\mathfrak{E}(g)$ изоморфны тогда и только тогда, когда функции f и g совпадают.

Утверждения, аналогичные предложениям 1, 3 и теореме 3, можно доказывать не только в многообразии всех ассоциативных алгебр, но и в любом другом многообразии U , содержащем многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр. Однако первичность локально-нильпотентных алгебр $\mathfrak{E}(f)$, соответствующих неограниченно возрастающим функциям f , может нарушиться при таком обобщении.

3. Пусть Φ — произвольное поле, A — алгебра над Φ , не обязательно ассоциативная. Напомним, что алгебра A называется локально-конечной, если любая ее конечно-порожденная подалгебра конечномерна (как линейное пространство над полем Φ).

Если поле Φ конечно, то, очевидно, алгебра A локально-конечна тогда и только тогда, когда она локально-конечна как универсальная алгебра с системой $\Omega = \{0, +, -, \cdot\} \cup \Phi$ операций (элементы из Φ рассматриваются как унарные операции). Поэтому из теоремы 2 вытекает

Предложение 4. Пусть Φ — произвольное конечное поле, U — произвольное многообразие алгебр над Φ , не обязательно ассоциативных.

Тогда существует такая счетно-порожденная локально-конечная алгебра $R \in U$, что любая счетно-порожденная локально-конечная алгебра из U является гомоморфным образом алгебры R .

Если же поле Φ бесконечно, то теорема 2 неприменима. Поэтому требуется особое рассмотрение. Результат может оказаться как отрицательным, так и положительным, в зависимости от выбора многообразия U и поля Φ .

Так, например, с помощью некоторой конструкции доказывается

Теорема 4. Пусть поле Φ счетно или алгебраически замкнуто.

Тогда в любом подмногообразии U многообразия AK всех ассоциативно-коммутативных алгебр над Φ существует такая счетно-порожденная

локально-конечная алгебра, что все остальные счетно-порожденные локально-конечные алгебры из U являются ее гомоморфным образом.

Доказательство основано на том, что в рассматриваемом случае существует такая счетно-порожденная локально-конечная алгебра R_0 в U , что любая конечномерная алгебра из U является гомоморфным образом алгебры R_0 .

Теорема 5. Пусть поле Φ несчетно и имеет характеристику либо 0, либо $p \neq 2$. Если многообразие U алгебр над Φ содержит многообразие K всех коммутативных не обязательно ассоциативных алгебр, то не существует такой счетно-порожденной локально-конечной алгебры R в U , что все остальные счетно-порожденные локально-конечные алгебры из U являются гомоморфным образом алгебры R .

Сначала доказывается, что любая конечномерная алгебра имеет лишь конечное число попарно неизоморфных первичных гомоморфных образов. Из этого выводится, что счетно-порожденная локально-конечная алгебра имеет не более счетного множества попарно неизоморфных конечномерных первичных гомоморфных образов. Доказательство завершается указанием несчетного множества попарно неизоморфных первичных двумерных коммутативных алгебр.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
8 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., «Наука», 1973. ² А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М., «Наука», 1970.