

А. В. ОСТРОВСКИЙ

О k -НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 XII 1975)

В этой заметке мы покажем, что если $f: X \rightarrow Y$ — k -накрывающее (или s -накрывающее) отображение полного сепарабельного метрического пространства X на метрическое пространство Y , то пространство Y метризуемо полной метрикой, а отображение f обладает G_δ -селектором (следствия 2 и 3). Это утверждения дают утвердительные ответы на соответствующие вопросы Э. Майкла ⁽¹⁾ и Р. Энгелькина ⁽⁹⁾.

Известно, что совершенные отображения, замкнутые отображения паракомпактов и открытые отображения полных метрических пространств являются k -накрывающими ^(2, 3). Заметим, что открытые отображения метрических пространств не обязаны быть k -накрывающими, но всегда являются s -накрывающими ^(6, 9).

О том, что открытые и замкнутые отображения сохраняют полноту метрических пространств, известно давно из работ Ф. Хаусдорфа ⁽⁴⁾ и И. Вайнштейна ⁽⁵⁾.

Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — s -накрывающее (в частности, k -накрывающее) отображение полного в смысле Чеха пространства X на паракомпакт Y с первой аксиомой счетности и для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ финально-компактно ^{***}.

Тогда найдется замкнутое в X подмножество X_0 такое, что $f(X_0) = Y$ и ограничение отображения f на подпространство X_0 $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y$ — совершенное отображение.

Доказательство. Привлекая теорему Пономарева ⁽⁷⁾, можно предполагать без ограничения общности, что $\text{ind } X = 0$. В леммах 1—3 мы установим некоторые специальные свойства отображения f . Остальная часть доказательства в основных чертах повторяет доказательство леммы Пасынкова ⁽⁸⁾ (доказательство теоремы совпадает с доказательством леммы Пасынкова, когда f — открытое отображение), если воспользоваться этими свойствами и вместо произвольных открытых множеств ограничиться y -универсальными.

Нам понадобится следующее понятие: пусть $\text{ind } X = 0$ и y -произвольная, но фиксированная точка из Y . Открытое множество $U \subset X$ назовем y -универсальным, если для него выполняются следующие условия:

а) для любого счетного компакта $S_y \subset Y$, $y \in S_y$ найдется бикомпакт $K_y \subset X$ такой, что $f(K_y) = S_y$ и

$$f^{-1}(y) \cap K_y \subset U;$$

б) $f^{-1}(y) \cap U$ — замкнутое в $f^{-1}(y)$ множество.

* Все отображения предполагаются непрерывными и «на», а пространства вполне регулярными. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется k -накрывающим (s -накрывающим), если для любого бикомпакта (соответственно счетного компакта) $S \subset Y$ найдется такой бикомпакт $K \subset X$, что $f(K) = S$.

** Этот вопрос возник в совместной работе Э. Майкла и А. Х. Стоуна ⁽⁴⁾. Мы будем его называть вопросом Э. Майкла вслед за А. В. Архангельским, поставившим его в своем докладе на Математическом конгрессе в Ницце.

*** Пространство X финально-компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать счетное покрытие.

Обозначим через η_y совокупность всех y -универсальных множеств. Очевидно, что совокупность η_y непуста, так как $X \in \eta_y$. Обозначим через R базу из открыто-замкнутых множеств пространства X .

На протяжении доказательства лемм 1–3 мы будем считать, что $f: X \rightarrow Y$ — s -накрывающее отображение, $\text{ind } X = 0$, Y — пространство с первой аксиомой счетности и для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ финально-компактно.

Лемма 1. Если $U \in \eta_y$ и γ — покрытие множества $f^{-1}(y) \cap U$ элементами из R , то найдется конечное число элементов $U_i \in \gamma$ ($i \in A$, $|A| < \aleph_0$) таких, что $\bigcup U_i \in \eta_y$.

Доказательство. Очевидно, множество $f^{-1}(y) \cap U$ финально-компактно и из покрытия γ можно выделить счетное подпокрытие из элементов $U_i \in \gamma$, $i = 1, 2, \dots$. Обозначим $T_k = \bigcup U_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Покажем, что существует номер k_0 такой, что $T_{k_0} \in \eta_y$. Предположим противное; тогда для каждого номера k найдется счетный компакт S^k , $y \in S^k$, для которого не существует бикompакта B , удовлетворяющего условиям

$$f^{-1}(y) \cap B \subset T_{k_0}, \quad f(B) = S^k.$$

Рассмотрим базу $U^k(y)$, $k = 1, 2, \dots$, в точке y . Положим $l^k = S^k \cap [U^k(y)]_Y$. Ясно, что $S = \bigcup l^k$, $k = 1, 2, \dots$, — счетный компакт и $y \in S$. По определению множества U найдется бикompакт $B \subset Y$ такой, что $f(B) = S$ и $f^{-1}(y) \cap B \subset U$. Множество $M = B \cap f^{-1}(y)$ бикompактно и поэтому найдется такое множество T_{k_0} , что $M \subset T_{k_0}$. Ясно, что $S^{k_0} = l^{k_0} \cup m^{k_0}$, где $m^{k_0} = S^{k_0} \setminus U^{k_0}(y)$. Отображение f s -накрывающее, поэтому для счетного компакта m^{k_0} найдется бикompакт L_1 такой, что $f(L_1) = m^{k_0}$. Положим $L_2 = B \cap f^{-1}(l^{k_0})$. Очевидно, тогда L_2 — бикompакт и для бикompакта $L = L_1 \cup L_2$ выполняются условия

$$L \cap f^{-1}(y) \subset T_{k_0}, \quad f(L) = S^{k_0},$$

а это противоречит выбору множества S^{k_0} .

Подобными рассуждениями доказываются следующие леммы.

Лемма 2. Если $U \in \eta_y$, то $y \in \text{Int } f(U)$.

Лемма 3. Если $U \in \eta_y$, то найдется такая окрестность $O(y)$ точки y , что $U \in \eta_\xi$ для каждой точки $\xi \in O(y)$.

Следствие 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — s -накрывающее отображение полного метрического пространства X на метрическое пространство Y и для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ сепарабельно.

Тогда существует совершенное отображение $g: X_0 \rightarrow Y$ замкнутого в X подпространства X_0 на пространство Y .

Так как полнота в смысле Чеха наследуется по замкнутым подпространствам и сохраняется при совершенных отображениях, то мы получаем утвердительный ответ на вопрос Э. Майкла.

Следствие 2. Если $f: X \rightarrow Y$ — k -накрывающее (s -накрывающее) отображение полного метрического сепарабельного пространства X на метрическое пространство Y , то пространство Y метризуемо полной метрикой*.

Если для отображения $f: X \rightarrow Y$ существует множество $Z \subset X$ типа G_δ в X такое, что для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит ровно из одной точки, то множество Z называется G_δ -селектором для отображения f . Следствие 3 дает ответ на вопрос Энгелькина⁽⁹⁾.

Следствие 3. Если $f: X \rightarrow Y$ — k -накрывающее (или s -накрывающее) отображение полного сепарабельного метрического пространства X на метрическое пространство Y , то существует G_δ -селектор для отображения f .

Это следствие вытекает из следствия 1, так как для совершенного отображения $g: X_0 \rightarrow Y$ существует G_δ -селектор⁽¹⁰⁾. В случае, когда про-

* Следствие 2 можно получить непосредственно из следствия 3, поэтому вопрос, поставленный Энгелькином, шире вопроса Майкла.

пространство Y является объединением счетного числа компактов, следствие 3 получено К. Альстером ⁽⁹⁾.

Образование $f: X \rightarrow Y$ называется индуктивно замкнутым (индуктивно открытым), если существует подпространство $X_0 \subset X$ такое, что $f(X_0) = Y$ и ограничение $f|_{X_0}$ отображения f на подпространство X_0 — замкнутое (открытое) отображение.

Следствие 4. Если $f: X \rightarrow Y$ — индуктивно замкнутое (индуктивно открытое) отображение полного метрического пространства X на метрическое пространство Y , то пространство Y метризуемо полной метрикой.

Следствие 4 вытекает из нашей теоремы и теоремы Вайнштейна ⁽⁵⁾. Известно ⁽¹⁾, что непустое сепарабельное метрическое пространство Y является образом пространства иррациональных чисел P при k -накрывающем отображении тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{H}(Y)$ непустых компактных подмножеств Y (снабженное метрикой Хаусдорфа) есть (абсолютное) A -множество. Поэтому можно получить.

Следствие 5. Сепарабельное метрическое пространство Y является (абсолютным) G_δ -множеством тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}(Y)$ является (абсолютным) A -множеством.

В частности, отсюда следует известный результат В. Гуревича ⁽¹⁾ о том, что $\mathcal{H}(Q)$, где Q — пространство рациональных чисел, не является (абсолютным) A -множеством.

Из лемм 1 и 2 следует, что если $f: X \rightarrow Y$ — s -накрывающее отображение пространства X на пространство Y с первой аксиомой счетности и для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ финально-компактно, то f — бифакторное отображение *. Обратное утверждение неверно: как показано Майклом и Стоуном ⁽¹⁾, пространство рациональных чисел Q является бифакторным образом пространства иррациональных чисел P , но s -накрывающего отображения $f: P \rightarrow Q$ не существует по следствию 2. Однако легко получить

Следствие 6. Если $f: X \rightarrow Y$ — бифакторное отображение ** локально-бикompактного пространства X на паракомпакт Y , то существует замкнутое в X подпространство X_0 такое, что ограничение $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y$ отображения f на подпространство X_0 — совершенное отображение (и $f(X_0) = Y$).

Таким образом, в условиях следствия 6 отображение f оказывается k -накрывающим, так как совершенные отображения являются таковыми (см. также ⁽⁶⁾). Обратим внимание, что в условиях нашей теоремы s -накрывающее отображение оказывается автоматически k -накрывающим.

К тому времени, когда Майклом была поставлена задача, про пространство Y было известно ⁽¹⁾, что оно является AF_{II} -множеством ***. Естественно возник вопрос о справедливости следующего утверждения:

I. Существует AF_{II} -множество X , не абсолютное G_δ .

Оказывается, что утверждение вытекает из следующего утверждения II, причем искомым множеством X является дополнение к множеству Y .

II. Существует несчетное CA -множество без совершенного ядра.

Известно (см. ^(12, 14)), что утверждение II, равно как и его отрицание, нельзя опровергнуть обычными средствами теории множеств; следовательно, утверждение I нельзя опровергнуть. Однако неизвестно, эквивалентны ли утверждения I и II, т. е. выводимо ли утверждение II из утверждения I?

* Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется бифакторным, если для каждой точки $y \in Y$ и любого открытого покрытия γ множества $f^{-1}(y)$ можно выбрать конечное число элементов из γ так, чтобы точка y лежала внутри образа объединения этих элементов.

** Если X и Y — пространства со счетной базой, то отображение f можно считать лишь факторным.

*** Далее все множества предполагаются лежащими на отрезке I и поэтому термин «абсолютное» опускается. AF_{II} -множеством называется A -множество, которое не содержит замкнутых счетных плотных в себе подмножеств.

К сожалению, утверждение II нельзя вывести из утверждения I тем же методом перехода к дополнению, которым утверждение I получается из утверждения II: может оказаться ⁽¹³⁾, что X есть AF_{II} -множество и не G_δ -множество, а его дополнение $Y = I \setminus X$ не только само содержит совершенное ядро, но даже если удалить из Y счетное число компактов, то оставшееся множество содержит совершенное ядро.

Можно показать, что утверждение I эквивалентно следующему утверждению:

III. *Существует несчетное CA -множество, в котором каждая конституанта содержится в σ -компактном множестве**.

Однако до сих пор неизвестно (см. ⁽¹⁵⁾; ⁽¹⁴⁾, стр. 555, проблема III), выводимо ли утверждение II из утверждения III, даже если считать, что все конституанты уже сами являются σ -компактными множествами.

Наконец, заметим, что в то время, когда ответ на задачу Майкла не был известен, возникла попытка связать ее с утверждением II путем доказательства следующего утверждения:

Всякое AF_{II} -множество является k -накрывающим образом некоторого G_δ -множества.

Теперь, пользуясь следствием 2, мы видим, что последнее утверждение нельзя доказать (обычными средствами теории множеств). Интересно отметить, что это утверждение нельзя и опровергнуть, если существует модель теории множеств, в которой всякое AF_{II} -множество является G_δ -множеством; такая модель существует, если окажется, что утверждения I и II эквивалентны.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. Michael, A. H. Stone, Pacif. J. Math., v. 28, № 3, 629 (1969). ² E. Michael, Israel J. Math., v. 2, № 3, 173 (1964). ³ А. В. Архангельский, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 15, 181 (1966). ⁴ F. Hausdorff, Fund. Math., v. 23, 279 (1934). ⁵ А. И. Вайнштейн, Учен. зап. МГУ, 155, 3 (1952). ⁶ K. Nagami, General Top. and Appl., v. 3, 355 (1973). ⁷ В. И. Пономарев, ДАН, т. 132, 1269 (1960). ⁸ Б. А. Пасынков, ДАН, т. 175, № 2, 292 (1967). ⁹ K. Alster, Bull. Polon Acad. Sci., Ser. Math., v. 19, № 2, 141 (1971). ¹⁰ K. Kuratowski, A. Maitra, ibid., v. 22, № 9, 877 (1974). ¹¹ В. Любецкий, Вестн. Моск. ун-та, № 2, 78 (1971). ¹² П. С. Новиков, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 38, 279 (1951). ¹³ А. Островский, Вестн. Моск. ун-та, № 2, 29 (1975). ¹⁴ Н. Н. Лузин, Собр. соч., т. 2, 1958, стр. 552. ¹⁵ А. А. Ляпунов, Изв. АН СССР, № 2, 285 (1937).

* Множество σ -компактно, если оно является объединением счетного числа компактов.