

УДК 517

МАТЕМАТИКА

В. Р. ПОРТНОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 IX 1975)

1°. Пусть X — рефлексивное банахово пространство *, H — банахово пространство, $S: X \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор, $B: X \rightarrow H$ — оператор, не обязательно линейный.

Рассмотрим уравнение

$$Su + B(u) = h, \quad (1)$$

где h — заданный элемент пространства H , а u — искомый элемент из X , и изучим вопрос о разрешимости этого уравнения.

Сформулируем следующие условия.

Условие I. Существуют непрерывный оператор $\theta: X \rightarrow X^*$ и число $p \in (1, \infty)$ такие, что $\langle \theta(u), u \rangle = \|u\|^p$, $\|\theta(u)\| = \|u\|^{p-1} \quad \forall u \in X$, причем $\langle \theta(u) - \theta(v), u - v \rangle > 0 \quad \forall u \neq v$.

Условие II. $S(X) \neq \{0\}$ и $\dim \ker S < \infty$.

Условие III. Существуют такое конечномерное банахово подпространство $\text{coker } S$ и такая вещественная билинейная форма $\{h, u\}$ на $H \times \text{coker } S$, удовлетворяющая неравенству

$$\{h, u\} \leq C \|h\| \|u\|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in H, \quad \forall u \in \text{coker } S,$$

что имеют место равенства

$$\begin{aligned} S(X) &= \{h \in H \mid \{h, u\} = 0 \quad \forall u \in \text{coker } S\}, \\ \{u \in \text{coker } S \mid \{h, u\} &= 0 \quad \forall h \in H\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Для формулировки дальнейших условий нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть Λ — линейное подпространство в $\ker S$, $A: \Lambda \rightarrow \text{coker } S$ — линейный оператор и пусть Q, Σ, Z — такие замкнутые линейные подпространства в X , а V и W — такие линейные подпространства в H , что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{coker } S &= A(\Lambda) \oplus Q, \quad \ker S = \Lambda \oplus \Sigma, \quad X = Z \oplus \ker S, \quad H = S(X) \oplus V \oplus W, \\ \{h, u\} &= 0 \quad \forall h \in V, \quad \forall u \in Q, \quad \{h, u\} = 0 \quad \forall h \in W, \quad \forall u \in A(\Lambda). \end{aligned}$$

Пусть, далее, $S^{-1}: S(X) \rightarrow Z$ — линейный непрерывный оператор, обладающий таким свойством: $SS^{-1}h = h \quad \forall h \in S(X)$ и $P_1: H \xrightarrow{\text{на}} S(X)$ — линейный проекционный оператор, у которого $\ker P_1 = V \oplus W$.

Условие IV. $\{B(u) - h, v\} = 0 \quad \forall u \in X, \quad \forall v \in Q$.

Определение. Пусть Y — замкнутое линейное подпространство в X . Через $\mathcal{O}(Y)$ обозначим совокупность всех таких замкнутых множеств $\Phi \subset Y$, которые обладают следующими двумя свойствами: 1) $0 \in \Phi \setminus \partial \Phi$ и 2) $\forall u \in Y \setminus \Phi$ существует единственное число $\tau > 0$ такое, что $tu \in \partial \Phi$.

* Все линейные пространства в данной работе считаются вещественными. Рассмотрение комплексных линейных пространств приводит к незначительным изменениям в формулировке результатов.

Для всякого элемента $h \in H$ через $\mathcal{T}_h$ обозначим совокупность всех таких чисел $\tau > 0$, для которых существует ограниченное множество $\Phi_\tau \in \mathcal{O}(\tilde{\Lambda})$, обладающее свойством

$$\{B(u+v), Av\} \geq \{h, Av\} \quad \forall u \in Z \oplus \Sigma, \quad \|u\| \leq \tau, \quad \forall v \in \partial \Phi_\tau \quad (2)$$

(это множество для заданного $\tau \in \mathcal{T}_h$ предполагается фиксированным).

Условие V. Множество $\mathcal{T}_h \neq \emptyset$, и существует такое число $\tau_0 \in \mathcal{T}_h$, что

$$\|S^{-1}P_1(h - B(u+v))\| \leq \tau_0 \quad \forall u \in Z \oplus \Sigma, \quad \|u\| = \tau_0, \quad \forall v \in \Phi_{\tau_0}.$$

Опишем одну ситуацию, в которой условие V выполнено.

Теорема 1. Пусть подпространство Λ разложено в прямую сумму линейных подпространств: $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \tilde{\Lambda}$ таких, что

$$\{B(u) - h, Av\} = 0 \quad \forall u \in X, \quad \forall v \in \Lambda_0.$$

Предположим, что имеют место неравенства

$$\|B(u)\| \leq C_1 + C_2 \|u\|^\delta \quad \forall u \in X \setminus \{0\}$$

$\{B(u+v), Av\} \geq \varepsilon_1 k^\gamma - \varepsilon_2 \|u\|^\delta k^\lambda - \varepsilon_3 \quad \forall u \in X \setminus \{0\}, \quad \forall v \in \partial \Phi^{(k)}, \quad \forall k$,
в которых $C_1, C_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta, \gamma, \sigma, \lambda \in \mathbf{R}$, $\alpha \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots$ — последовательность ограниченных множеств из $\mathcal{O}(\tilde{\Lambda})$. Пусть для некоторого $\omega > 0$ выполняется соотношение $d_\omega < \infty$, где $d_\omega = \sup_k (k^{-\omega} (\sup_{v \in \Phi^{(k)}} \|v\|))$. Введем обозначение:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - (1 - \operatorname{sgn}(\gamma - \omega)) \sup_k (k^{-\omega} \sup_{v \in \Phi^{(k)}} \{h, v\}).$$

Предположим, далее, что $0 \leq \delta \leq 1$, $\varepsilon_2 \geq 0$, $\gamma \geq \omega$, $0 \leq \lambda \leq \gamma$, $\sigma \geq 0$, $\gamma - \lambda - \omega \delta \geq 0$, $\sigma(1 - \operatorname{sgn}(\gamma - \lambda)) = 0$, $\varepsilon > \varepsilon_2(1 - \operatorname{sgn}(\gamma - \lambda))$, причем если $0 < \delta < 1$ и $\gamma > \lambda$, то $\|S^{-1}P_1\|C_2 d_\omega^\delta (1 - \operatorname{sgn}(\gamma - \lambda - \omega \delta \sigma)) (\varepsilon_2 / \varepsilon)^{\omega \delta / (\gamma - \lambda)} < 1$, если $\delta = 1$ и $\gamma > \lambda$, то $\|S^{-1}P_1\|C_2 (1 + d_\omega (1 - \operatorname{sgn}(\gamma - \lambda - \sigma \omega)) (\varepsilon_2 / \varepsilon)^{\omega / (\gamma - \lambda)}) < 1$, и, наконец, если $\delta = 1$ и $\gamma = \lambda$, то $\|S^{-1}P_1\|C_2 < 1$.

Тогда условие V выполнено.

Условие VI. Оператор B ограничен (т. е. переводит ограниченные множества из X в ограниченные множества из H) и может быть представлен в виде $B(u) = B(u, u)$, где оператор $u, v \rightarrow B(u, v)$, рассматриваемый как оператор из $X \times X$ в H , обладает следующими свойствами:

а) $\forall u \in X \quad v \rightarrow B(u, v)$ — непрерывный ограниченный оператор из X в H ;

б) $\nabla_h(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in X$, где $\nabla_h(u, v) = \langle \theta(u) - \theta(v), u - v \rangle - \langle \theta S^{-1}P_1(h - B(u)) - \theta S^{-1}P_1(h - B(u, v)), u - v \rangle$;

в) если $u_\mu \rightarrow u$ слабо в X и $\nabla_h(u_\mu, u) \rightarrow 0$, то $B(u_\mu) \rightarrow B(u)$ слабо в H ;

г) если $u_\mu \rightarrow u$ слабо в X , то $\forall v \in X \quad B(u_\mu, v) \rightarrow B(u, v)$ сильно в H .

Замечание 1. Условие VI, очевидно, выполнено, если оператор B переводит слабо сходящиеся последовательности из X в сильно сходящиеся последовательности из H .

Замечание 2. Свойства б) и в) в условии VI имеют место, например, если X — гильбертово пространство, θ — изометрический изоморфизм между X и X^* , а B — оператор, переводящий сильно сходящиеся последовательности из X в слабо сходящиеся последовательности из H и удовлетворяющий неравенству $\|B(u) - B(u, v)\| \leq L \|u - v\| \quad \forall u, v \in X$ с константой $L < \|S^{-1}P_1\|^{-1}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия I—VI.

Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение.

Для доказательства заметим, прежде всего, что, в силу условий I—IV, уравнение (1) является следствием уравнения

$$G^{(h)}(u) = 0, \quad (3)$$

$$G^{(h)}(u) = \Pi^* \theta \Pi u - \Pi^* \theta S^{-1}P_1(h - B(u)) - F P_2(h - B(u)),$$

$\Pi: X \xrightarrow{\text{на}} Z \oplus \Sigma$ — линейный проекционный оператор, у которого $\ker \Pi = \Lambda$,
 $P_2: H \xrightarrow{\text{на}} V$ — линейный проекционный оператор, у которого $\ker P_2 = S(X) \oplus W$, и $F: H \rightarrow X^*$ — линейный оператор, определяемый с помощью тождества $\langle Fh, v \rangle = \{h, A(v - \Pi v)\} \quad \forall v \in X$. Следующие неравенства (4), (5) являются следствиями условия V:

$$\langle G^{(h)}(u+v), v \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Z \oplus \Sigma, \|u\| \leq \tau_0, \quad \forall v \in \partial \Phi_{\tau_0}, \quad (4)$$

$$\langle G^{(h)}(u+v), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Z \oplus \Sigma, \|u\| = \tau_0, \quad \forall v \in \Phi_{\tau_0}. \quad (5)$$

Из равенств (4), (5), как было показано в работе автора (¹), следует существование в пространстве X ограниченной последовательности Галёркина для оператора $G^{(h)}$. Предельный переход в галёркинских уравнениях может быть осуществлен в силу того, что оператор $G^{(h)}$ является оператором «вариационного исчисления» (см. (²), стр. 192), при этом оператор $G^{(h)}(u, v)$ следует записать в виде

$$G^{(h)}(u, v) = \Pi^* \theta \Pi v - \Pi^* \theta S^{-1} P_1(h - B(u, u + \Pi(v - u))) - F P_2(h - B(u)) \\ \forall u, v \in X.$$

Таким образом, уравнение (3), а следовательно, и уравнение (1) разрешимо.

2°. Примерами операторов, удовлетворяющих условиям II и III, служат операторы краевых задач теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем уравнений с частными производными (³, ⁴), а также операторы краевых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений (⁵), стр. 84–91). Для них форма $\{h, u\}$ имеет вид

$$\{h, u\} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_k} \int_{\Omega^{(k)}} h_{jk} \mathcal{P}_{jk} u \, dx^{(k)},$$

где M, N_k — натуральные числа, $\Omega^{(k)}$ — пространство с σ -конечной мерой, $h = \{h_{jk}(x^{(k)})\}_{j=1, \dots, N_k, k=1, \dots, M}$, $h_{jk} \in L_{p_{jk}}(\Omega^{(k)})$, $1 < p_{jk} \leq \infty$, $\mathcal{P}_{jk}: \text{coker } S \rightarrow L_{p'_{jk}}(\Omega^{(k)})$ — линейный оператор.

Пример. Пусть $n, m, m_0, \dots, m_{m-1}$ — натуральные числа, $p \in (1, \infty)$, Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, граница которой представляет собой достаточно гладкое многообразие размерности $n-1$ (точки Ω обозначаются через x , а точки $\partial \Omega$ через x'), $X = W_p^{2m}(\Omega)$,

$H = L_p(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} W_p^{2m-m_j-1/p}(\partial \Omega)$, $S: X \rightarrow H$ — оператор, порожденный регу-

лярной краевой эллиптической задачей (⁶), стр. 165–178), поставленной для заданного в Ω эллиптического дифференциального выражения порядка $2m$ с вещественными коэффициентами (коэффициенты граничных дифференциальных выражений также считаются вещественными), $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(v)}$ — все мультииндексы, по модулю не превосходящие m_j , $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(v)}$ — все мультииндексы, по модулю не превосходящие $2m$, $B(u) = (\mu(x, D^{\alpha^{(1)}}u, \dots, D^{\alpha^{(v)}}u), \lambda_0(x', D^{\alpha^{(1)}}u, \dots, D^{\alpha^{(v_0)}}u), \dots, \lambda_{m-1}(x', D^{\alpha^{(1)}}u, \dots, D^{\alpha^{(v_{m-1}})}u))$, причем функции $\mu: \Omega \times \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lambda_j: \partial \Omega \times \mathbb{R}^{v_j} \rightarrow \mathbb{R}$, $j=0, \dots, m-1$, таковы, что для оператора B выполнено условие VI (см. также замечания 1 и 2), $h = (f(x), g_0(x'), \dots, g_{m-1}(x')) \in H$,

$$\{h, u\} = \int_{\Omega} f u \, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial \Omega} g_j S_j^+ u \, dx'$$

(по поводу обозначения S_j^+ см. ⁽⁶⁾, стр. 168—170). Условия I—III, как известно, выполнены. Потребуем выполнения условий IV и V, и тогда в силу теоремы 2 уравнение $Su + B(u) = h$ окажется разрешимым.

Аналогично могут быть изучены краевые задачи для некоторых систем дифференциальных уравнений, эллиптических в смысле Дуглиса — Ниренберга, а также систем обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными добавками как в самой системе, так и в краевых условиях.

В только что рассмотренном примере содержатся в качестве частного случая задачи, изученные в ^(7, 8). Характерной особенностью этих задач является тот факт, что они оказываются разрешимыми лишь при определенных ограничениях на правую часть. Следующие два утверждения являются следствиями рассмотренного выше примера, причем в них описаны ситуации, когда разрешимость краевой задачи имеет место при любой правой части из H .

а) Краевая задача $\Delta u + \lambda u + a|u|^{\delta} \operatorname{sgn} u = f$ в Ω , $u|_{\partial\Omega} = g$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, 1)$, $a \in L_{\infty}(\Omega)$, причем $\int_{\Omega} a|\xi|^{\delta+1} dx \neq 0$ для любой ненулевой функции $\xi \in W_p^2(\Omega)$ такой, что $\xi|_{\partial\Omega} = 0$ и $\Delta \xi + \lambda \xi = 0$ в Ω , разрешима в пространстве $W_p^2(\Omega) \forall g \in W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$, $\forall f \in L_p(\Omega)$.

б) Краевая задача $\Delta u + a(1+u^2)^{\omega/2} \sin((1+u^2)^{\sigma/2}) = f$ в Ω , $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g$, где $\omega > 0$, $\sigma > 0$, $\omega + \sigma \leq 1$, $a \in L_{\infty}(\Omega)$, $\int_{\Omega} a dx \neq 0$, $\partial/\partial \nu$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$, разрешима в пространстве $W_p^2(\Omega) \forall g \in W^{1-1/p}(\partial\Omega)$, $\forall f \in L_p(\Omega)$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Р. Портнов, В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, 1975, стр. 128.
- ² Ж. Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.
- ³ J. L. Lions, E. Magenes, Problems aux non homogènes at applications, v. 1, Dubod, Paris, 1968.
- ⁴ Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Матем. сб., т. 78, № 3, 446 (1969).
- ⁵ С. Г. Крейн, Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1971.
- ⁶ Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ, изд. 2, М., 1972.
- ⁷ E. Landesman, A. Lazer, J. Math. and Mech., v. 19, № 7, 609 (1970).
- ⁸ S. A. Williams, J. Diff. Equations, v. 8, № 3, 580 (1970).