

О. А. САРКИСЯН

О СВЯЗИ МЕЖДУ АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ ПРОБЛЕМАМИ В ГРУППАХ И ПОЛУГРУППАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 13 I 1976)

Неразрешимость проблемы тождества для полугрупп была установлена А. А. Марковым и Э. Постом еще в 1947 г. В 1952 г. П. С. Новиков доказал неразрешимость проблемы тождества для групп. Однако до сих пор не было известно, следует ли из разрешимости проблемы тождества в полугруппе разрешимость проблемы тождества в группе с теми же образующими и определяющими соотношениями, если полугруппа изоморфно вкладывается в группу. Теорема 1 дает отрицательный ответ на этот вопрос. В указанной в этой теореме полугруппе разрешима даже проблема делимости, а в соответствующей группе проблема тождества неразрешима. Далее рассматривается та же задача для класса полугрупп с системой определяющих соотношений, не содержащей циклов. Оказывается, что для полугрупп этого класса разрешимости проблемы делимости достаточно для разрешимости проблемы тождества в соответствующей группе.

Все необходимые определения и обозначения содержатся в работе (1).

1. Пусть Γ_0 — группа с неразрешимой проблемой тождества, построенная в работе (2) на основе полугруппы $\Pi_0 = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; E_i = F_i, i=1, \dots, m \rangle$ с неразрешимой проблемой равенства слову q . Введя обозначение $q^{-1}tq = s$, получим группу Γ_1 с образующими

$$a_1, a_2, \dots, a_n, c, r, l, t, k, s$$

и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} ra_j &= a_j r^{m+1}, & j &= 1, 2, \dots, n, \\ a_j l &= l^{m+1} a_j, & ca_j &= a_j c, & j &= 1, 2, \dots, n; \\ l^i E_i r^i c &= c l^i F_i r^i, & i &= 1, 2, \dots, m; \\ ct &= tc, & rk &= kr, \\ tl &= lt, & ck &= kc, \\ tq &= qs, & sk &= ks, \end{aligned}$$

изоморфную группе Γ_0 . Полугруппу с теми же образующими и определяющими соотношениями обозначим через Π_1 .

Теорема 1. *Полугруппа Π_1 изоморфно вкладывается в группу Γ_1 и в Π_1 разрешимы проблемы тождества и делимости.*

Разрешимость проблем тождества и делимости в полугруппе Π_1 следует из того, что для всякого слова X в Π_1 существует лишь конечное число слов, равных ему.

Для доказательства этого факта достаточно построить верхнюю оценку для всех слов, равных X , зависящую от длины X .

Из системы определяющих соотношений полугруппы Π_1 видно, что если слова X и Y равны, то число вхождений букв c, t, s и k в слово X равно числу вхождений этих букв в Y . Число вхождений букв l и r может изменяться лишь в результате применения преобразований вида

$$ra_j = a_j r^{m+1}, \quad a_j l = l^{m+1} a_j,$$

и поэтому оно ограничено, если ограничено число вхождений букв a_j .

Построение же оценки числа вхождений букв a_j в слово Y в зависимости от числа вхождений этих букв в X основано на следующей лемме.

Лемма 1. *В выводе, переводящем слово X в слово Y и не содержащем поворотов, каждая буква c может участвовать лишь в конечном числе преобразований вида*

$$l^i E_i r^i c = c l^i F_i r^i.$$

Для доказательства того, что полугруппа Π_1 изоморфно вкладывается в группу Γ_1 , нужно убедиться в том, что из вывода, переводящего одно слово в положительном алфавите в другое, можно исключить все вставки.

Так как буква c является правильной проходной буквой (см. ⁽²⁾), то ее вставки можно исключить. Так как буквы k , t и s участвуют лишь в преобразованиях, являющихся коммутациями, то все вставленные буквы k , t и s вместе с буквами k^{-1} , t^{-1} и s^{-1} можно вычеркнуть из всех слов, входящих в вывод. Очевидно, что при этом получится вывод, не содержащий вставок букв c , k , t и s .

Для исключения вставок букв l , r и a_j заметим, что из всех слов вывода можно вычеркнуть все те вставленные буквы l , r , a_j и соответствующие им буквы l^{-1} , r^{-1} , a_j^{-1} , которые не участвуют в преобразованиях вида

$$l^i E_i r^i c = c l^i F_i r^i.$$

Завершает доказательство теоремы 1 следующая

Лемма 2. *Если слова X и Y не содержат отрицательных букв, то в выводе, переводящем X в Y и не содержащем поворотов, вставленные буквы l , r и a_j не могут участвовать в преобразованиях вида*

$$l^i E_i r^i c = c l^i F_i r^i.$$

2. Пусть Π_2 — полугруппа с образующими

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

и определяющими соотношениями

$$A_i = B_i,$$

а Γ_2 — группа, получающаяся из Π_2 добавлением отрицательных букв и тривиальных соотношений. Справедлива следующая

Теорема 2. *Если система определяющих соотношений полугруппы Π_2 не содержит циклов и в Π_2 разрешима проблема делимости, то в соответствующей группе Γ_2 разрешима проблема тождества.*

Заметим, что разрешимость проблемы тождества в Π_2 легко следует из разрешимости проблемы делимости.

Утверждение теоремы 2 достаточно доказать не для группы Γ_2 , а для изоморфной ей группы Γ_2' , получающейся из Γ_2 добавлением соотношений

$$A_i^{-1} = B_i^{-1}.$$

С. И. Адян в работе ⁽¹⁾ доказал, что полугруппа с системой определяющих соотношений без циклов изоморфно вкладывается в соответствующую группу, т. е. из равенства слов X и Y , состоящих из положительных букв, следует существование вывода, переводящего X в Y и не содержащего вставок. Аналогичным образом можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Если X равно Y в группе Γ_2' и Y состоит из положительных букв, то существует вывод, переводящий X в Y и не содержащий вставок*

Лемма 3 позволяет свести проблему тождества в группе Γ_2' к проблеме равенства слову в положительном алфавите для слов вида $X_1 Y^{-1} X_2$, где $X_1 Y X_2$ — слово в положительном алфавите.

Будем говорить, что система определяющих соотношений удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, если:

- 1) она не содержит циклов;
- 2) длина всех определяющих соотношений не меньше трех;
- 3) если одно определяющее слово входит в другое, то это вхождение является началом.

Лемма 4. Если система определяющих соотношений полугруппы Π_3 удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, то проблема делимости в Π_3 разрешима тогда и только тогда, когда в Γ_3 разрешима проблема равенства слову в положительном алфавите для слов вида $X_1 Y^{-1} X_2$, где $X_1 Y X_2$ — слово в положительном алфавите.

Многократным применением операций замены некоторых образующих полугруппы на две новые и обозначения некоторых слов в полугруппе новыми буквами можно по всякой полугруппе Π_2 построить полугруппу Π_3 с системой определяющих соотношений, удовлетворяющей условию $\mathcal{A}$ и такую, что разрешимость проблемы тождества или делимости в одной из этих полугрупп влечет разрешимость соответствующей проблемы в другой, а разрешимость проблемы тождества в одной из соответствующих групп Γ_2 или Γ_3 влечет ее разрешимость в другой.

Из последнего утверждения и леммы 4 следует теорема 2.

Автор выражает благодарность С. И. Адяну, которому принадлежит постановка задачи и который руководил настоящей работой.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. И. Адян, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 85 (1966). ² В. В. Борисов, Матем. заметки, т. 6, в. 5, 521 (1969).