

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Ю. Р. ВАЙНБЕРГ

ОБ ОБЛАСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫЧИСЛИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 XII 1975)

Области определения вычислимых отображений ⁽¹⁾ широко изучались в вычислимом анализе ⁽²⁻⁷⁾.

1. Пусть δf обозначает область определения функции f , N — множество натуральных чисел, R^+ — множество положительных рациональных чисел; k, m, n — переменные для натуральных чисел. Для каждого из множеств вычислимых функций типа $N \rightarrow N$, $N^2 \rightarrow R^+$, $N^2 \rightarrow N$, $R^+ \rightarrow N$ фиксируем гёделеву нумерацию этого множества. Вычислимую функцию (в.ф.) с номером n в одной из этих нумераций будем обозначать через $\varphi_{[n]}$. Фиксируем также гёделеву нумерацию ω перечислимых подмножеств N .

Мы будем пользоваться терминологией ^(8, 9).

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{M} = \langle \mathcal{X}, \alpha, \rho \rangle$, — эффективно метрическое пространство (э.м.п.). Последовательность $\{x_k\}$ точек пространства $\mathcal{M}$ называется вычислимой, если существует в.ф. Φ (называемая определяющей функцией последовательности) такая, что

$$(\forall n) [\alpha(\Phi(n)) = x_n].$$

Последовательность $\{x_k\}$ называется вычислимо фундаментальной, если существует всюду определенная в.ф. Ψ типа $R^+ \rightarrow N$ (называемая регулятором фундаментальности последовательности $\{x_k\}$), удовлетворяющая условию

$$(\forall r \in R^+) (\forall m \geq \Psi(r)) (\forall n \geq \Psi(r)) [\rho(x_m, x_n) < r].$$

Э.м.п. $\mathcal{M}$ называется эффективно почти полным, если существует в.ф. (называемая функцией почти полноты пространства $\mathcal{M}$), находящая по номеру определяющей функции некоторой сходящейся последовательности Ξ и номеру регулятора фундаментальности той же последовательности α -номер предела последовательности Ξ .

Э.м.п. $\mathcal{M}$ называется эффективно сепарабельным, если существует перечислимое множество C натуральных чисел (называемое множеством эффективной сепарабельности) такое, что $C \subseteq \delta\alpha$ и $\alpha(C)$ плотно в $\mathcal{M}$.

Через $S_{\mathcal{M}}(x, r)$ будем обозначать открытый шар в $\mathcal{M}$ радиуса r с центром в точке x .

Подмножество $\mathcal{Z}$ э.м.п. $\mathcal{M}$ назовем вполне перечислимым, если существует перечислимое множество L натуральных чисел (называемое собственным множеством для множества $\mathcal{Z}$) такое, что $\alpha^{-1}(\mathcal{Z}) = L \cap \delta\alpha$; α^* — нумерация всех вполне перечислимых в $\mathcal{M}$ множеств такая, что n является α^* -номером $\mathcal{Z}$ тогда и только тогда, когда $\omega(n)$ есть собственное множество для $\mathcal{Z}$. Вполне перечислимые множества и только они являются областями определения вычислимых отображений (из) э.м.п., они и будут служить основными объектами дальнейших рассмотрений.

2. Пусть $\mathcal{M}$ — э.м.п., $\mathcal{M} = \langle \mathcal{X}, \alpha, \rho \rangle$. Введем на $\mathcal{X}$ топологию, приняв за систему элементов базы множество $\mathcal{U}$ всех непустых вполне перечислимых

подмножеств $\mathcal{M}$. Так полученное топологическое пространство вместе с нумерацией α множества $\mathcal{H}$ и нумерацией $\mathcal{U}$, являющейся сужением α^* на $(\alpha^*)^{-1}(\mathcal{U})$, назовем райсовым пространством для $\mathcal{M}$ и обозначим через $\mathcal{M}^*$. Очевидно, что $\mathcal{M}^*$ — эффективно топологическое пространство.

Пусть $\mathcal{M}^*$ — райсово пространство для э.м.п. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \alpha, \rho \rangle$. Мы скажем, что $\mathcal{M}^*$ подобно эффективно метрическому пространству, если $\mathcal{M}^*$ гомеоморфно некоторому э.м.п. $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{H}, \alpha, \rho_1 \rangle$ (ср. с понятием эффективной метризуемости из ⁽⁸⁾).

3. Известно (см., например, теорему 2 из ⁽⁵⁾), что всякое вполне перечислимое подмножество $\mathcal{Z}$ эффективно почти полного э.м.п. вместе с пределом вычислимой вычислимо фундаментальной последовательности содержит бесконечно много элементов этой последовательности. В то же время имеет место

Теорема 1. *Каковы бы ни были э.м.п. $\mathcal{M}$ и вычислимая последовательность Ξ элементов пространства $\mathcal{M}$, сходящаяся к точке x из $\mathcal{M}$ и имеющая бесконечно много отличных от x членов, существует вполне перечислимое в $\mathcal{M}$ множество $\mathcal{Z}$ такое, что $x \in \mathcal{Z}$ и $\Xi \setminus \mathcal{Z}$ бесконечно.*

Тем самым никакая вычислимая последовательность элементов э.м.п. $\mathcal{M}$, имеющая бесконечно много различных элементов, не сходится в $\mathcal{M}^*$. Откуда вытекает

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — э.м.п. и $\mathcal{M}^*$ эффективно сепарабельно.*

Тогда никакая не изолированная в пространстве $\mathcal{M}^$ точка не обладает в $\mathcal{M}^*$ перечислимой полной системой окрестностей.*

Заметим, что если $\mathcal{M}$ — эффективно почти полное эффективно сепарабельное э.м.п., то $\mathcal{M}^*$ эффективно сепарабельно.

Следствие. *В предположениях теоремы 2, если $\mathcal{M}^*$ не дискретно, то оно:*

- 1) не допускает перечислимой базы,
- 2) не является эффективно метризуемым.

Следствие допускает следующее усиление.

Теорема 3. *Если $\mathcal{M}^*$ подобно эффективно сепарабельному э.м.п., то $\mathcal{M}^*$ дискретно.*

Как это следует, например, из теоремы 2 в ⁽⁵⁾, если $\mathcal{M}$ — эффективно почти полное эффективно сепарабельное э.м.п., то $\mathcal{M}^*$ дискретно тогда и только тогда, когда дискретно $\mathcal{M}$. Тем самым наша теорема 3 дает, что в этом случае $\mathcal{M}^*$ подобно э.м.п. лишь для дискретного $\mathcal{M}$. Отсюда, например, следует, что райсовы пространства ни для конструктивного континуума $\mathcal{K}$, ни для бэровского пространства $\mathcal{F}$ общерекурсивных функций не являются подобными э.м.п. Однако имеет место следующая

Теорема 4. *Если э.м.п. $\mathcal{M}$ эффективно почти полно и эффективно сепарабельно, то райсово пространство $\mathcal{M}^*$ метризуемо.*

Теорема 4 вытекает из приводимой ниже теоремы 5.

В ⁽⁵⁾ описывается способ построения для каждого э.м.п. из некоторого класса $\mathcal{E}$ эффективно метрических пространств непустого вполне перечислимого нигде не плотного замкнутого множества (класс $\mathcal{E}$ содержит, в частности, пространства $\mathcal{K}$ и $\mathcal{F}$).

Теорема 5. *Для всяких эффективно почти полного эффективно сепарабельного э.м.п. $\mathcal{M}$, вполне перечислимого в $\mathcal{M}$ множества $\mathcal{Z}$ и точки x из $\mathcal{Z}$ существует вполне перечислимое замкнутое в $\mathcal{M}$ множество $\mathcal{M}$ такое, что $x \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{Z}$.*

$\mathcal{M}$ может быть найдено эффективно по $\mathcal{M}$, $\mathcal{Z}$ и x . Если $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$, то $\mathcal{M}$ может быть выбрано нигде не плотным в $\mathcal{M}$.

4. Доказательство теоремы 1. Можно считать, что $\alpha^{-1}(x)$ бесконечно, а последовательность $\Xi = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ обладает свойством

$$(\forall n) [0 < \rho(x, x_{n+1}) < \rho(x, x_n)].$$

Тогда, очевидно, существуют всюду определенные в.ф. f и g типа $N \rightarrow R^+$ и в.ф. h_1 и h_2 типа $N \rightarrow N$ такие, что

$$\begin{aligned} (\forall n) \quad & [\rho(x, x_{n+1}) < f(n) < \rho(x, x_n) \& \alpha^*(h_1(n)) \& \alpha^*(h_2(n)) \& \\ & \alpha^*(h_1(n)) = S_{\mathfrak{M}}(x, f(n)) \& \alpha^*(h_2(n)) = S_{\mathfrak{M}}(x_n, g(n)) \& \\ (\forall k) \quad & [\omega(h_2(n)) \cap \omega(h_2(n+k+1)) = \phi \& \omega(h_2(n)) \cap \omega(h_1(n+k)) = \phi]]. \end{aligned}$$

Пусть $A = \{n \mid n \in \omega(h_1(n))\}$. Можно показать, что бесконечно множество $Q = \{k \mid A \cap \omega(h_2(k)) = \phi\}$. Пусть l из N таково, что $\alpha^*(l) = \mathfrak{M} \setminus (\exists \cup \{x\})$ и пусть $B = \bigcup_{h \in N \setminus Q} \omega(h_2(k))$. Нетрудно видеть тогда, что множество $A \cup B \cup \omega(l)$ есть собственное множество искомого вполне перечислимого множества $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} = \mathfrak{M} \setminus \{x_k \mid k \in Q\}$.

Доказательство теоремы 5.

1°. Фиксируем перечислимое, но не разрешимое множество P натуральных чисел, разрешимое множество T пар натуральных чисел такое, что

$$P = \{x \mid (\exists y) [\langle x, y \rangle \in T]\} \& (\langle x, y \rangle \in T \Rightarrow \langle x, y+1 \rangle \in T),$$

в.ф. u , удовлетворяющую соотношению

$$[!u(n) \Leftrightarrow n \in P] \& [!u(n) \Rightarrow u(n) = \mu m [\langle n, m \rangle \in T]],$$

в.ф. ξ типа $R^+ \rightarrow N$ такую, что для любых рациональных r_1 и r_2 из $0 < r_1 < r_2$ следует $\xi(r_1) \geq \xi(r_2)$ и $\xi(2^{-n}) = n+1$; пусть s — номер ξ .

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{X}, \alpha, \rho \rangle$, π — функция почти полноты и C_0 — множество эффективной сепарабельности пространства $\mathfrak{M}$; h — в.ф. типа $N^2 \rightarrow N$ такая, что:

- 1) $h(N^2) \subseteq C_0 \& (\forall n \in \delta\alpha) (\forall k) [!h(n, k) \& \rho(\alpha(n), \alpha(h(n, k))) < 2^{-k-1}]$;
- 2) $(\forall n) (\forall k) [!h(n, k) \Rightarrow (\forall m < k) [!h(n, m) \& \rho(\alpha(h(n, m+1)), \alpha(h(n, m))) < 2^{-m-1}]]$.

Через v обозначим в.ф. такую, что $(\forall k) (\forall n) [\varphi_{[v(n)]}(k) = h(n, k)]$. Пусть $\mathcal{Z}$ вполне перечислимо в $\mathfrak{M}$ и $x \in \mathcal{Z}$.

2°. Построим специальное множество C эффективной сепарабельности для $\mathfrak{M}$.

Пусть в.ф. χ и ψ таковы, что

$$\begin{aligned} \varphi_{[\chi(m, n)]}(k) &= \begin{cases} h(n, k), & \text{если } \langle m, k \rangle \notin T, \\ h(n, u(m)), & \text{если } \langle m, k \rangle \in T; \end{cases} \\ \varphi_{[\psi(m, n)]}(k) &= \begin{cases} \varphi_{[n]}(k), & \text{если } \langle m, k \rangle \notin T, \\ \varphi_{[n]}(u(m)), & \text{если } \langle m, k \rangle \in T. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \cup \{\pi(\chi(m, n), s) \mid m \in P \& !h(n, u(m))\}; \\ C_2 &= \{\pi(\psi(m, n), s) \mid m \in P \& (\forall k \leq u(m)) [! \varphi_{[n]}(k) \& \varphi_{[n]}(k) \in C_1] \& \\ & (\forall k < u(m)) [\rho(\alpha(\varphi_{[n]}(k)), \alpha(\varphi_{[n]}(k+1))) < 2^{-k-1}]\}; \quad C = C_1 \cup C_2. \end{aligned}$$

3°. Пусть L_0 — собственное множество для множества $\mathcal{Z}$. Положим $L = \{n \mid n \in L_0 \& !\pi(v(n), s) \& \pi(v(n), s) \in L_0\}$. Легко видеть, что L есть собственное множество для $\mathcal{Z}$ такое, что

$$(\forall m \in \delta\alpha \setminus L) (\forall n \in L \setminus \delta\alpha) [(\forall k) [!h(n, k)] \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\alpha(h(n, k)), \alpha(m)) \neq 0].$$

4°. Опишем способ построения специального вполне перечислимого множества, содержащего x и лежащего в $\mathcal{Z}$.

Пусть $q \in L \cap \delta\alpha$. Для всяких натуральных чисел a и b таких, что

$$\begin{aligned} (\forall m) (\forall n) \quad & [(!\varphi_{[a]}(m, n) \Rightarrow \varphi_{[a]}(m, n) \in R^+ \& m \in \& n \in L \& \\ & !\varphi_{[b]}(m, n) \& \varphi_{[b]}(m, n) \in N) \& (m \in L \cap \delta\alpha \& n \in L \cap \delta\alpha \Rightarrow !\varphi_{[a]}(m, n))], \end{aligned}$$

обозначим через $L_{a,b}$ перечислимое подмножество N^2 , удовлетворяющее условию

$$\langle m, n \rangle \in L_{a,b} \Leftrightarrow !\varphi_{[a]}(m, n) \ \& \ (m \in C \vee n \in C) \ \& \\ (\exists k > \varphi_{[b]}(m, n)) [!h(m, k) \ \& \ !h(n, k) \ \& \ \varphi_{[a]}(m, n) > \rho(\alpha(h(m, k)), \\ \alpha(h(n, k)))].$$

Положим $M_0(a, b, q) = \{q\}$, для $k \geq 1$

$$M_k(a, b, q) = \{m \mid (\exists n \in M_{k-1}(a, b, q)) [\langle n, m \rangle \in L_{a,b}]\};$$

$$M(a, b, q) = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k(a, b, q); \quad \mathcal{M}(a, b, q) = \alpha(M(a, b, q)).$$

Лемма. Если $q \in \alpha^{-1}(x)$, то $\mathcal{M}(a, b, q)$ — вполне перечислимое подмножество $\mathfrak{M}$, $M(a, b, q)$ — его собственное множество, $x \in \mathcal{M}(a, b, q) \in \mathcal{L}$.

5°. Мы укажем теперь такие a и b , что при любом q из $L \cap \delta\alpha$ подмножество $\mathcal{M}(a, b, q)$ замкнуто в $\mathfrak{M}$.

Лемма. Существует в.ф. f типа $N^2 \rightarrow R^+$ такая, что

$$(\forall m)(\forall n) [(!f(m, n) \Rightarrow m \in L \ \& \ (\forall k < n) [!f(m, k) \ \& \ f(m, k) \geq \\ \geq 2f(m, k+1)]) \ \& \ (m \in L \cap \delta\alpha \Rightarrow !f(m, n) \ \& \ (n \in \delta\alpha \setminus L \Rightarrow f(m, n) < \\ < \rho(\alpha(m), \alpha(n)))) \ \& \ (m \in L \setminus \delta\alpha \ \& \ n \in \delta\alpha \setminus L \ \& \ !f(m, n) \ \& \\ (\forall k) [!h(m, k)] \Rightarrow f(m, n) < \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\alpha(h(m, k)), \alpha(n))].$$

Пусть натуральные числа a_0 и b_0 таковы, что $(\forall m)(\forall n)$

$$[\varphi_{[a_0]}(m, n) \simeq \min(f(m, n), f(n, m)) \ \& \ !\varphi_{[b_0]}(m, n) \Rightarrow \varphi_{[b_0]}(m, n) \in N \ \& \\ (!\varphi_{[b_0]}(m, n) \Leftrightarrow !\varphi_{[a_0]}(m, n)) \ \& \ \varphi_{[a_0]}(m, n) > 2^{-\varphi_{[b_0]}(m, n)}].$$

Следующее утверждение завершает доказательство теоремы 5.

Лемма. $\mathcal{M}(a_0, b_0, q)$ замкнуто в $\mathfrak{M}$.

Пусть $l \in \delta\alpha$ и $\alpha(l) \notin \mathcal{M}(a_0, b_0, q)$. Тогда, если $\alpha(l) \in \mathcal{L}$, то, как нетрудно видеть, $\alpha(l) \notin \mathcal{M}(a_0, b_0, q)$. Пусть теперь $\alpha(l) \notin \mathcal{L}$. Положим

$$H_1 = \{m \mid m \in M(a_0, b_0, q) \cap \delta\alpha \ \& \ m < l+3\}; \\ H_2 = \{m \mid m \in M(a_0, b_0, q) \setminus \delta\alpha \ \& \ m < l+3 \ \& \ (\forall k) [!h(m, k)]\}; \\ H_3 = \{m \mid (\exists n < l+3) [n \in M(a_0, b_0, q) \setminus (H_1 \cup H_2) \ \& \ \langle n, m \rangle \in L_{a_0, b_0}]\}; \\ H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \{q\}; \quad \varepsilon = \min_{m \in H} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\alpha(h(m, k)), \alpha(l)).$$

Можно показать, что $\varepsilon > 0$ и шар $S_{\mathfrak{M}}(\alpha(l), \varepsilon/4)$ не пересекается с $\mathcal{M}(a_0, b_0, q)$.

Поступило
11 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Успенский, ДАН, т. 105, № 6, 1155 (1955). ² А. А. Марков, УМН, т. 9, в. 3 (61), 226 (1954). ³ R. Friedberg, C. R. Seances Acad. Sci., v. 247, № 12, 852 (1958). ⁴ Г. С. Цейтин, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 72, 537 (1964). ⁵ Y. N. Moschovakis, Fund. Math., v. 55, № 3, 215 (1964). ⁶ Б. А. Кушнер, Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973. ⁷ В. П. Чернов, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 40, 136 (1974). ⁸ Е. Ю. Ногина, ДАН, т. 169, № 1, 28 (1966). ⁹ Ю. Р. Вайнберг, Е. Ю. Ногина, Сб. Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам, М., 1974, стр. 253.