

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Г. Н. БАКУНИН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И ОПЕРАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ДВОЯКОКРУГОВЫХ ПОЛИЭДРАХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 6 VI 1975)

Работа посвящена построению интегральных представлений голоморфных функций и решению некоторой операторной задачи в неограниченных полных двоякокруговых полиэдрах с центром в нуле. В качестве математического аппарата используется интегральное представление Бергмана — Вейля ⁽¹⁾, метод получения интегральных представлений в двоякокруговых областях А. А. Темлякова ^(2, 3) и операторный метод Ш. И. Баврина ⁽⁴⁻⁶⁾.

1. В пространстве C^2 рассмотрим класс W аналитических полиэдров.

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_1|^{a_m} |z_2|^{b_m} < R_m, \quad m=1, 2, \dots, n; \quad n \geq 1\}. \quad (1)$$

где a_m, b_m — натуральные числа (при этом число a_n или число b_1 , или оба одновременно могут равняться нулю; в этих случаях будем соответственно считать, что $b_n=1$ или $a_1=1$, или $a_1=1$ и $b_n=1$), $R_m > 0$. Граница ∂D области D содержит трехмерный элемент каждой аналитической гиперповерхности

$$\Gamma_m = \{(z_1, z_2) : |z_1|^{a_m} |z_2|^{b_m} = R_m\}, \quad m=1, 2, \dots, n,$$

и Γ_m занумерованы таким образом, что для $(z_1, z_2) \in \partial D \cap \Gamma_m$ и $(z_1', z_2') \in \partial D \cap \Gamma_{m+1}$ выполняется неравенство $|z_1| \geq |z_1'|$.

Если в (1) $n > 1$, то под остовом области D понимается, как обычно, множество $\Delta = \{\Delta_{1,2}; \Delta_{2,3}; \dots; \Delta_{n-1,n}\}$, где $\Delta_{v,v+1} = \Gamma_v \cap \Gamma_{v+1}$, $v=1, 2, \dots, n-1$, — двумерные ребра области D .

Класс W разобьем на четыре подкласса: $D \in W_{11}$, если $a_n \neq 0, b_1 \neq 0$; $D \in W_{10}$, если $a_n = 0, b_1 \neq 0$; $D \in W_{01}$, если $a_n \neq 0, b_1 = 0$ и $D \in W_{00}$, если $a_n = 0, b_1 = 0$.

Положим, что $f \in H(D)$, если функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна в области D и непрерывна во всех конечных точках границы ∂D .

Известно ⁽¹⁾, что для $f \in H(D)$, $D \in W_{00}$, справедливо интегральное представление Бергмана — Вейля, восстанавливающее функцию $f(z_1, z_2)$ в D по ее значениям на остове Δ . Для $D \in W \setminus W_{00}$ представление Бергмана — Вейля, вообще говоря, не имеет места. В следующей теореме устанавливается интегральная формула (2), справедливая для всех областей из класса W .

Теорема 1. Если $f \in H(D)$, $D \in W_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1$, то для $(z_1, z_2) \in D$

$$f(z_1, z_2) = \frac{z}{(2\pi i)^2} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_{|z_1|=1} d\zeta_1 \int_{|z_2|=r_1^{-1}b_1} \times \\ \times \frac{\omega_1 P_2^{-1}(\zeta_1, \zeta_2; z_1, r_2^{-1}(\tau) z_2) f(r_1(\tau) \zeta_1, r_2(\tau) \zeta_2) d\zeta_2}{\zeta_1 (\zeta_1^{a_1} \zeta_2^{b_1} - z_1^{a_1} z_2^{b_1})} +$$

$$+ S(z_1, z_2) + \frac{\beta}{(2\pi i)^2} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_{|\xi_1|=1} d\xi_1 \int_{|\xi_2|=R_n^{1/b_n}} d\xi_2 \times \\ \times \frac{\omega_2 P_1^n(\xi_1, \xi_2; \tilde{r}_1^{-1}(\tau) z_1, z_2) f(\tilde{r}_1(\tau) \xi_1, \tilde{r}_2(\tau) \xi_2) d\xi_2}{\xi_2 (\xi_1^n \xi_2^{b_n} - z_1^n z_2^{b_n})}, \quad (2)$$

где

$$\omega_1 = e^{-(\tau+A)} \exp(\tau e^{-(\tau+A)/a_1} z_1^{-1}), \\ \omega_2 = 2e^{-\tau} \exp(2\tau e^{-(\tau+B)/b_n} z_2^{-1}), \\ P_1^m(\xi_1 - z_1) + P_2^m(\xi_2 - z_2) = \xi_1^{a_m} \xi_2^{b_m} - z_1^{a_m} z_2^{b_m}, \\ P_1^m = P_1^m(\xi_1, \xi_2; z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & a_m = 0, \\ \xi_2^{l_m}, & a_m = 1, \\ \xi_2^{l_m} (\xi_1^{a_m-1} + \xi_1^{a_m-2} z_1 + \dots + z_1^{a_m-1}), & a_m > 1; \end{cases} \\ r_1(\tau) = \exp \frac{\tau+A}{a_1}, \quad r_2(\tau) = \exp \left(-\frac{\tau+A}{b_1} \right), \\ \tilde{r}_1(\tau) = \exp \left(-\frac{\tau+B}{a_n} \right), \quad \tilde{r}_2(\tau) = \exp \frac{\tau+B}{b_n},$$

A, B — произвольные, достаточно большие действительные числа;

$$S(z_1, z_2) = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Delta_{v,v+1}} \frac{(P_1^v P_2^{v+1} - P_2^v P_1^{v+1}) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1^{a_v} \xi_2^{b_v} - z_1^{a_v} z_2^{b_v}) (\xi_1^{a_{v+1}} \xi_2^{b_{v+1}} - z_1^{a_{v+1}} z_2^{b_{v+1}})}$$

для $n > 1$, и $S(z_1, z_2) = 0$ для $n = 1$.

В случае $D \in W_{00}$ формула (2) совпадает с представлением Бергмана — Вейля. Для $D \in W_{\alpha\beta}$, $\alpha + \beta > 0$, теорема 1 доказывается с помощью последовательности областей из W_{00} , аппроксимирующей D изнутри.

Многообразие интегрирования M формулы (2) зависит от значений параметров в (1).

1) Если $D \in W_{10}$ ($D \in W_{01}$) и в (1) $n = 1$, то $M = \{(z_1, z_2): |z_1| > C, |z_2| = R_1\}$ ($M = \{(z_1, z_2): |z_1| = R_1, |z_2| > C\}$) для любого положительного C ;

2) если в (1) $n > 1$, то $M \supset \Delta$;

3) если $D \in W_{11}$, то M включает в себя проколотые окрестности ε_1 и ε_2 соответственно точек $(\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ в относительной топологии на ∂D ;

4) если $D \in W_{10}$ ($D \in W_{01}$) и в (1) $n > 1$, то $M \supset \varepsilon_1$ ($M \supset \varepsilon_2$).

Теорема 2. Если $f \in H(D)$, $D \in W_{11}$, $n = 1$, $R_1 = 1$, то для $(z_1, z_2) \in D$

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{V_{a_1, A}(\tau, z_1) f(r_1(\tau) e^{ib_1 t}, r_2(\tau) \xi) d\xi}{\xi - u_1} + \\ + \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{[V_{a_1, B}(\tau, z_2) - 1] f(\tilde{r}_1(\tau) \xi, \tilde{r}_2(\tau) e^{ia_1 t}) d\xi}{\xi - u_2} \quad (3)$$

где

$$V_{a_1, A}(\tau, z) = \exp[\tau e^{-(\tau+A)/a_1} z^{1/a_1} e^{-it}]; \\ u_1 = z_1^{a_1/b_1} z_2 e^{-ia_1 t}, \quad u_2 = z_1 z_2^{b_1/a_1} e^{-ib_1 t}.$$

* Под многообразием интегрирования интегрального представления понимается множество, на котором должна быть известна функция или оператор от функции для ее восстановления в некоторой области с помощью данного представления.

Внутренние интегралы в формуле (3) являются интегралами Коши одного комплексного переменного. Этот факт указывает на близость структуры и способа доказательства формулы (3) к интегральным представлениям Темлякова ^(2, 3).

2. Предположим, что на многообразии интегрирования M формулы (2) известны не значения функции $f \in H(D)$, а значения некоторых ее операторов, в общем случае не равных между собой на различных связанных компонентах множества M . В этих условиях задачу восстановления функции $f(z_1, z_2)$ в области D с помощью интегрального представления назовем операторной задачей для областей $D \in W$. Использование операторного метода И. И. Баврина ⁽⁴⁻⁶⁾ дает возможность решить поставленную операторную задачу в группе интегродифференциальных операторов $L_{A_j, \tilde{A}_j}^{(k_j, -\tilde{k}_j)} [f]$ ⁽⁵⁻⁷⁾.

Теорема 3. Если функция $f(z_1, z_2)$ вместе с частными производными любого порядка принадлежит множеству $H(D)$, $D \in W_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1$, то для $(z_1, z_2) \in D$

$$f(z_1, z_2) = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_{|\zeta_1|=1} d\zeta_1 \int_{|\zeta_2|=R_1^{1/b_1}} L_{\tilde{A}_0, A_0}^{(\tilde{k}_0, -k_0)} \left[\frac{\omega_1 P_2^{-1}(\zeta_1, \zeta_2; z_1, r_2^{-1}(\tau) z_2)}{\zeta_1 (\zeta_1^{a_1} \zeta_2^{b_1} - z_1^{a_1} z_2^{b_1})} \right] \times \\ \times L_{A_0, \tilde{A}_0}^{(k_0, -\tilde{k}_0)} [f(r_1(\tau) \zeta_1, r_2(\tau) \zeta_2)] d\zeta_2 + \tilde{S}(z_1, z_2) + \frac{\beta}{(2\pi i)^2} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \times \\ \times \int_{|\zeta_1|=1} d\zeta_1 \int_{|\zeta_2|=R_n^{1/b_n}} L_{\tilde{A}_n, A_n}^{(\tilde{k}_n, -k_n)} \left[\frac{\omega_2 P_1^{-1}(\zeta_1, \zeta_2; \tilde{r}_1^{-1}(\tau) z_1, z_2)}{\zeta_2 (\zeta_1^{a_n} \zeta_2^{b_n} - z_1^{a_n} z_2^{b_n})} \right] \times \\ \times L_{A_n, \tilde{A}_n}^{(k_n, -\tilde{k}_n)} [f(\tilde{r}_1(\tau) \zeta_1, \tilde{r}_2(\tau) \zeta_2)] d\zeta_2, \quad (4)$$

где

$$\tilde{S}(z_1, z_2) = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Delta_{v, v+1}} L_{\tilde{A}_v, A_v}^{(\tilde{k}_v, -k_v)} \times \\ \times \left[\frac{P_1^v P_2^{v+1} - P_2^v P_1^{v+1}}{(\zeta_1^{a_v} \zeta_2^{b_v} - z_1^{a_v} z_2^{b_v})(\zeta_1^{a_{v+1}} \zeta_2^{b_{v+1}} - z_1^{a_{v+1}} z_2^{b_{v+1}})} \right] L_{A_v, \tilde{A}_v}^{(k_v, -\tilde{k}_v)} [f(\zeta_1, \zeta_2)] d\zeta_1 d\zeta_2$$

для $n > 1$ и $\tilde{S}(z_1, z_2)$ для $n = 1$.

Формула (4) и является решением операторной задачи для $D \in W$ в классе операторов $L_{A_j, \tilde{A}_j}^{(k_j, -\tilde{k}_j)} [f]$.

Автор выражает благодарность проф. И. И. Баврину, под руководством которого выполнена работа.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
9 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. ² А. А. Темляков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, 89 (1957). ³ А. А. Темляков, Уч. зап. Московск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской, т. 96, 3 (1960). ⁴ И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской, т. 166, 3 (1966). ⁵ И. И. Баврин, ДАН, т. 181, № 2 (1968). ⁶ И. И. Баврин, В сб. тр.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, М., в. 15 (1), 3 (1973). ⁷ Г. И. Сечкин, ДАН, т. 217, № 4 (1974).