

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК, А. В. ФУРСИКОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОПФА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. Н. Вексу 24 XI 1975)

1. Пусть Ω — область в R^n с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $\Omega \times [0, T]$, $0 < T < \infty$, задана параболическая система дифференциальных уравнений

$$M(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + A(x, D_x)u - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} F_j(x, u) - F_0(x, u) - g(t, x) = 0 \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

$$u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^p(t, x)), \quad g(t, x) = (g^1(t, x), \dots, g^p(t, x)) \in L_2(0, T; H_{-1}(\Omega)), \quad x = (x^1, \dots, x^n);$$

$A(x, D)$ — линейная сильно эллиптическая система операторов второго порядка, $F_j(x, u): \Omega \times R^p \rightarrow R^p$, $j=0, 1, \dots, n$, F_j зависит от u квадратично.

Предполагается что: 1) коэффициенты уравнения (1) принадлежат $C_b^2(\Omega)$; 2) область Ω такова, что оператор $-\Delta + 1: H_1^0(\Omega) \cap H_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) = L_2$ имеет плотную в L_2 область значений; 3) имеет место соотношение $\langle \partial/\partial x^j F_j(x, u) + F_0(x, u), u \rangle = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, $\langle u, w \rangle = \int_\Omega u \cdot w \, dx$.

Пусть $\mu(t, \omega)$, $0 \leq t \leq T$, — семейство σ -аддитивных мер, заданных на σ -алгебре $\mathfrak{B}(L_2)$ борелевских множеств $\omega \subset L_2(\Omega) = L_2$, а $\chi(t, w)$ — характеристический функционал меры $\mu(t, \omega)$:

$$\chi(t, w) = \int e^{i\langle u, w \rangle} \mu(t, du), \quad w \in L_2, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где интеграл в первом соотношении берется по L_2 .

Под уравнением Хопфа, соответствующим задаче (1), понимается

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(t, w) = L(u, w) \mu(t, du), \quad L(u, w) = -i(\langle u, A^* w \rangle) + \sum \left\langle F_j(x, u), \frac{\partial}{\partial x^j} w \right\rangle - \langle F_0(x, u), w \rangle - \langle g, w \rangle \exp(i \langle u, w \rangle), \quad (3)$$

A^* — оператор, формально сопряженный A . В работе строится решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию

$$\chi(t, w)|_{t=0} = \int e^{i\langle u, w \rangle} \mu(0, du), \quad \int \|u\|^2 \mu(0, du) < \infty, \quad (4)$$

$\|\cdot\|$ — норма в L_2 . Семейство мер $\mu(t, \omega)$, отвечающее решению $\chi(t, w)$ задачи (3), (4) (см. (2)), называется статистическим решением задачи (1). В случае системы Навье — Стокса, заданной в ограниченной области Ω , статистические решения были изучены в (1). Метод построения статистического решения, предложенный в настоящей работе, отличается от метода в (1), хотя также использует галеркинские приближения статистических решений. Предложенный метод дал возможность рассмотреть случай неограниченной области Ω , несамосопряженного оператора A , а также получить теорему существования для индивидуальных решений как следствие теоремы существования статистических решений и другие новые факты.

Доказаны также теоремы о гладкости и аналитичности по w построенных решений $\chi(t, w)$ уравнения Хопфа (3) и теорема о разрешимости бесконечной цепочки моментных уравнений.

Отметим, что другой подход в изучении статистических решений или задачи Коши (3), (4), основанный на измеримом выборе индивидуальных решений осуществлен в (2, 4).

2. Пусть $\{e_j(x)\}$ — ортонормированный базис в L_2 , удовлетворяющий условиям:

$$1^0) e_j(x) \in H_1^0(\Omega) = H_1^0, (1+|x^2|)^{r/2} D^\alpha e_j(x) \in L_2, |\alpha| \leq 2, j=1, 2, \dots,$$

$$2^0) (1+|x|^2)^r e_j(x) \in L_\infty(\Omega) = L_\infty, (1+|x|^2)^r \frac{\partial}{\partial x^k} e_j(x) \in L_\infty, k=1, \dots, n; j=1, 2, \dots, \text{ где } r - \text{некоторое число.}$$

Пусть $E_N = [e_1(x), \dots, e_N(x)]$ и $P_N: H \rightarrow E_N$ — оператор проектирования на пространство E_N , $E_\infty = \bigcup E_N$, $N=1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть $\mu(0, \omega)$ — вероятностная мера на $\mathfrak{B}(L_2)$, удовлетворяющая (4). Тогда существует функционал $\chi(t, w)$, определенный на $[0, T] \times L_2$ и удовлетворяющий следующим условиям:

а) $\forall t \in [0, T]$ $\chi(t, w)$ является характеристическим функционалом вероятностной меры $\mu(t, du)$, заданной на $\mathfrak{B}(L_2)$;

б) мера $\mu(t, \omega)$ при почти всех $t \in [0, T]$ (относительно dt) сосредоточена на H_1^0 и σ -аддитивна на $\mathfrak{B}(H_1^0)$;

в) $\exists \gamma > 0, \beta > 0$, что $\forall t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$\int \|u\|^2 \mu(t, du) + \gamma \int_0^t \int \|u\|_1^2 \mu(\tau, du) d\tau \leq e^{\beta t} \left(\int \|u\|^2 \mu(0, du) + \int_0^t \|g(\tau, \cdot)\|_{-1}^2 d\tau \right), \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_k$ — норма пространства Соболева $H_k(\Omega) = H_k$;

г) функционал $\chi(t, w)$ удовлетворяет начальному условию (4), при каждом $w \in E_\infty$ абсолютно непрерывен по t и для почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяет уравнению (3).

Доказательство проводится по следующей схеме. Пусть

$$\mu_N(t, \omega) = \mu(0, P_N^{-1}(S_N^{-1}(t)(\omega \cap E_N))), S_N^{-1}(t)\omega = \{u \in E_N: S_N(t)u \in \omega\},$$

$\omega \in \mathfrak{B}(L_2)$, $S_N(t)u_N(0, x) = u_N(t, x)$ — оператор, сопоставляющий начальному условию $u_N(0, x) \in E_N$ решение галеркинских приближений задачи (1): $P_N M P_N u_N(t, x) = 0$, $u_N(t, x) \in E_N \quad \forall t \in [0, T]$. Из известной энергетической оценки для приближений $u_N(t, x)$ вытекает, что

$$\int \|u\|^2 \mu_N(t, du) + \gamma \int_0^t \left(\int \|u\|_1^2 \mu_N(\tau, du) \right) d\tau \leq e^{\beta t} \left(\int \|u\|^2 \mu(0, du) + \int_0^t \|g\|_{-1}^2 d\tau \right). \quad (6)$$

Кроме того, мера $\mu_N(t, \omega)$, которая называется галеркинским приближением искомого статистического решения, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_N(t, w) = \int L(u, P_N w) \mu_N(t, du), \quad \chi_N|_{t=0} = \int e^{i\langle u, w \rangle} \mu_N(0, du). \quad (7)$$

Семейство функционалов $\{\chi_N(t, w)\}$, рассматриваемое на $[0, T] \times B_k$, где $B_k = \{u \in E_k: \|u\| \leq k\}$, k фиксировано, удовлетворяет условиям теоремы Арцела. Поэтому с помощью диагонального процесса можно выбрать подпоследовательность $\{\chi_{N'}\}$, сходящуюся на $[0, T] \times E_\infty$ к некоторому функционалу $\chi(t, w)$. При каждом $t \in [0, T]$ этот функционал продолжается по непрерывности на все L_2 . В дальнейшем последовательность $\{N'\}$ обозначается через $\{N\}$.

Лемма 1. а) При каждом $t \in [0, T]$ функционал $\chi(t, w)$ является характеристическим функционалом некоторой σ -аддитивной меры $\mu(t, \omega)$,

$\omega \in \mathfrak{B}(L_2)$. 6) При почти всех $t \in [0, T]$ мера $\mu(t, \omega)$ сосредоточена на H_1^0 и σ -аддитивна на $\mathfrak{B}(H_1^0)$.

С помощью леммы 1 из (6) выводится (5).

Пусть H_- — пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, для которых $\langle (1 + |x|^2)^{-r} u, u \rangle < \infty$, $r > 0$ фиксировано. Построенные меры $\mu(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, можно продолжить на $\mathfrak{B}(H_-)$ по формуле $\mu(t, \omega_1) = \mu(t, \omega_1 \cap L_2) \quad \forall \omega_1 \subset \subset \mathfrak{B}(H_-)$. Аналогично можно на H_- продолжить меры $\mu_N(t, \omega)$. Положим

$$\hat{\mu}(t, \omega) = \int_0^t \mu(\tau, du) d\tau, \quad \hat{\mu}_N(t, \omega) = \int_0^t \mu_N(\tau, \omega) d\tau, \quad \omega \in \mathfrak{B}(H_-). \quad (8)$$

Лемма 2. Для любого непрерывного на H_- функционала $f(u)$, удовлетворяющего неравенству $|f(u)| \leq C(1 + \|u\|^2)$, и $\forall t \in [0, T]$ справедливо

$$\int f(u) \hat{\mu}_N(t, du) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int f(u) \hat{\mu}(t, du). \quad (9)$$

Основное в доказательстве — установить слабую компактность мер $\hat{\mu}_N(t, \omega)$. Они, очевидно, равномерно ограничены. Следовательно, достаточно доказать, что они равномерно по N малы вне некоторого компакта $K \subset H_-$ (3). В качестве K берется шар $B_R = \{\|u\|_1 \leq R\} \subset H_1$, который компактен в H_- . Равномерная малость $\hat{\mu}_N(t, H_- \setminus B_R)$ ($\forall N, t \in [0, T]$) при больших R вытекает из (6). В силу сходимости $\chi_N(t, w)$ к $\chi(t, w)$ отсюда вытекает (9) для $f(u)$, ограниченных и непрерывных. Далее, с помощью теорем Беппо — Леви и Лебега устанавливается справедливость (9) для указанных в лемме $f(u)$.

Интегрируя по t уравнения (7) и (3), получим

$$\begin{aligned} \chi_N(t, w) - \chi_N(0, w) &= \int L(u, P_N w) \hat{\mu}_N(t, du), \\ \chi(t, w) - \chi(0, w) &= \int L(u, w) \hat{\mu}(t, du). \end{aligned} \quad (10)$$

Каждый член правой части первого уравнения сходится по лемме 2 к соответствующему члену второго уравнения. Кроме того, по построению $\chi_N(t, w) \rightarrow \chi(t, w) \quad \forall t \in [0, T], w \in E_\infty$. Поэтому, переходя в первом уравнении к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим второе уравнение, эквивалентное (3).

Замечание. В случае системы уравнений Навье — Стокса все построения, указанные выше, остаются в силе, если предварительно спроектировать обе части системы на подпространство соленоидальных полей.

3. Лемма 3. Пусть для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ $\|u\|^k \mu(0, du) = \gamma_k < \infty$. Тогда:

а) $\int \|u\|^k \mu(t, du) < C_k \quad \forall t \in [0, T]$;

б) соответствующие характеристические функционалы $\chi(t, w)$ бесконечно дифференцируемы по w в смысле Фреше $\forall t \in [0, T]$;

в) если $\gamma_k \leq A \alpha^k k!$, $\alpha > 0$, то для $t \in [0, T]$ функционал $\chi(t, w_1 + iw_2)$ аналитичен по $w_1 + iw_2$ в полосе $\|w_2\| \leq C_\alpha$, $w_1 \in L_2$, где C_α — константа, зависящая от α ;

г) если $\gamma_k \leq A \alpha^k$ или $\gamma_k \leq A \alpha^k ([k/2])!!$, то при $t \in [0, T]$ $\chi(t, w)$ — целый функционал относительно $w = w_1 + iw_2$, $w_j \in L_2$.

4. Мера $\delta(u_0, \omega)$ такая, что $\delta(u_0, \omega) = 1$ для $u_0 \in \omega$ и $\delta(u_0, \omega) = 0$ для $u_0 \notin \omega$, называется δ -мерой.

Теорема 2. Если начальная мера $\mu(0, \omega) = \delta(u_0, \omega)$, то статистическое решение $\mu(t, \omega)$, построенное в теореме 1, также является при каждом $t \in [0, T]$ δ -мерой; $\mu(t, \omega) = \delta(u, (t, \cdot), \omega)$, причем $u(t, \cdot) = u(t, x) \in L_\infty(0, T; L_2) \cap L_2(0, T, H_1^0)$ — решение (1) при начальном условии u_0 .

Так как $\chi_N(t, w) = \exp \langle S_N(t) P_N u_0, w \rangle$, то и предельный функционал $\chi(t, w) = \exp \langle u(t, \cdot), w \rangle$. Отсюда выводятся утверждения теоремы.

5. Пусть для упрощения записи $g(t, x) \equiv 0$ и $p = 1$, т. е. (1) является скалярным уравнением. Моментной функцией порядка k , $k \in \mathbb{Z}_+$, статисти-

ческого решения $\mu(t, \omega)$ называется функция $M_k(t, \bar{x}^k) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega^k))$, $\Omega^k = \Omega \times \dots \times \Omega$ (k раз), $\bar{x}^k = (x_1, \dots, x_k)$, для которой

$$\langle M_k(t, \bar{x}^k), \varphi(\bar{x}^k) \rangle = \langle u(x_1) \dots u(x_k), \varphi(\bar{x}^k) \rangle \mu(t, du) \quad \forall \varphi(\bar{x}^k) \in L_2(\Omega^k). \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда моментные функции M_k статистического решения $\mu(t, \omega)$, построенного в теореме 1, обладают следующими свойствами: а) для них конечны интегралы

$$\int_0^T \left(\int \left| \frac{\partial}{\partial x_i} M_k(\tau, x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \right|^2 dx_1 \dots dx_k \right) d\tau < \infty,$$

$$\int_0^T \left(\int \left(\int \left| \frac{\partial}{\partial x_i} M_{k+1}(\tau, x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_k) \right| dx_i \right)^2 dx_1 \dots dx_k \right)^{1/2} d\tau < \infty,$$

$i=1, \dots, k; j=1, \dots, n$; все интегралы по x_r берутся по области Ω . Кроме того, конечны интегралы, которые получаются из (12), если опустить оператор $\partial/\partial x_i^j$ и интегрирование по τ ;

б) $M_k(t, \bar{x}^k) \in L_2(0, T; H_1^0(\Omega^k))$;

в) функции $M_k(t, \bar{x}^k)$ ($\bar{x}^k = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega \times \dots \times \Omega \equiv \Omega^k$) удовлетворяют следующей бесконечной цепочке моментных уравнений ($k=1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial}{\partial t} M_k(t, \bar{x}^k) = - \left(\sum_1^k A(x_j, D_{x_j}) M_k(t, \bar{x}^k) + \sum_1^k B(x_j) M_{k+1}(t, x_1, \dots, x_j, x_j, \dots) \right), \quad (13)$$

$$B(x) M(x) = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x^i} (F_i(x) M(x)) + F_0(x) M(x), \quad M_k|_{t=0} = M(0, \bar{x}^k).$$

Для $\varphi(\bar{x}^k) \in C_0^\infty(\Omega^k)$ функция $\langle M_k(t, \bar{x}^k), \varphi(\bar{x}^k) \rangle$ абсолютно непрерывна по t , $t \in [0, T]$. Уравнение (13) понимается в смысле теории обобщенных функций.

Из теоремы 3, в частности, вытекает, что если начальная мера $\mu(0, \omega)$ удовлетворяет условиям леммы 3, то задача Коши (13), в которой $M(0, \bar{x}^k)$ — моментные функции меры $\mu(0, \omega)$, разрешима, причем решения $M_k(t, \bar{x}^k)$ обладают указанными в теореме 3 свойствами. Действительно, в качестве решения $M_k(t, \bar{x}^k)$ задачи (13) достаточно взять моментные функции (11), где $\mu(t, \omega)$ — статистическое решение из теоремы 1.

Предложение. Пусть $M_{k,N}(t, \bar{x}^k)$ — моментные функции меры $\mu_N(t, \omega)$. Тогда для выбранной в теореме 1 подпоследовательности $\{N'\}$

$$\int_0^T \langle M_{k,N'}(t, \bar{x}^k), \varphi(t, \bar{x}^k) \rangle dt \xrightarrow{N' \rightarrow \infty} \int_0^T \langle M_k(t, \bar{x}^k), \varphi(t, \bar{x}^k) \rangle dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

т. е. моментные функции галеркинских приближений $\mu_{N'}(t, \omega)$ в слабом смысле сходятся к моментным функциям статистического решения $\mu(t, \omega)$ задачи (1).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ C. Foias, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, v. 48 (1972); v. 49 (1973). ² A. Bensoussan, R. Temam, J. Funct. Anal., v. 13, № 2 (1973). ³ И. И. Гизман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971. ⁴ А. М. Вершик, О. А. Ладыженская, ДАН, т. 226, № 1 (1976).