

Ю. К. БЕЛЯЕВ, А. Н. МАЛЬКОВ

ПОЛНОТА СЕМЕЙСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР ПРИ ОБСЛЕДОВАНИИ ПО ПЛАНАМ ПЕРВОГО ВХОЖДЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VI 1975)

Проблемы единственности несмещенных оценок при выборочном обследовании совокупностей приводят к необходимости изучения свойства полноты семейств вероятностных мер. Простейшие схемы наблюдений биномиальных последовательностей исследованы в работах ^(1, 2). Задачи становятся существенно сложнее, если объекты обследуемых совокупностей относятся к одному из m классов, $m \geq 2$. Схема полиномиальных блужданий ($m \geq 2$) изучалась академиком Ю. В. Линником и его учениками ⁽³⁻⁶⁾. В этой работе рассмотрена общая схема выборочного обследования конечной совокупности, получен критерий полноты, найдены простые достаточные условия полноты, обобщающие результаты ^(5, 6).

Пусть $\xi_\theta(t)$ — семейство случайных процессов со значениями в пространстве $\mathcal{E}$, $\theta \in \Theta$, реализации которых наблюдаются до момента τ_Γ первого достижения границы $\Gamma \subset \mathcal{E}$. Так организованные наблюдения называются планами первого вхождения с границей Γ . Координаты точек достижения Γ траекторией $\xi_\theta(t)$ порождают на Γ семейство вероятностных мер $\mathcal{P}_{\Gamma, \theta} = \{P_\theta(\xi(\tau_\Gamma) \in A), A \subset \Gamma, \theta \in \Theta\}$, где A и Γ принадлежат определенным классам измеримых множеств. Обозначим $|G|$ число точек множества G .

Определение 1. План первого вхождения $\Pi(\Gamma)$, соответствующий границе Γ , называется **полным**, если семейство $\mathcal{P}_{\Gamma, \theta}$ полное (относительно Θ), т. е. если из тождества

$$E_\theta \varphi(\xi(\tau_\Gamma)) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (1)$$

следует $\varphi(\xi(\tau_\Gamma)) = 0$ почти наверное относительно $\mathcal{P}_{\Gamma, \theta}$ (E_θ — знак математического ожидания).

Общая задача состоит в нахождении критериев или достаточных условий полноты или неполноты планов $\Pi(\Gamma)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — конечная совокупность N объектов, каждый из которых принадлежит к одному из m классов, $m \geq 2$, N_j — число объектов j -го класса, $N = N_1 + \dots + N_m$, $j = 1, \dots, m$. В обобщенной схеме Пойа объекты отбираются последовательно, вероятность отбора одинакова для всех объектов, содержащихся в момент выбора в $\mathfrak{F}$. В соответствии с заранее выбранной последовательностью целых чисел $c_{ij} = -1, 0, +1, \dots$ в $\mathfrak{F}$ добавляется $c_{ij} + 1$ объектов j -го класса, после того как в i -й раз отобранный объект оказался из j -го класса. $c_{ij} = 0$ ($c_{ij} = -1$) соответствует случайному выбору с возвращением (без возвращения), $c_{ij} = c$ соответствует схеме Пойа ^(7, 8).

Процессу контроля сопоставим траекторию, образованную последовательными переходами по точкам m -мерной решетки $\mathcal{R}^m = \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$: $d_i = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, m$. Переход из $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$ в $\mathbf{d}_{(j)} = (d_1, \dots, d_{j-1}, d_j + 1, d_{j+1}, \dots, d_m)$, $j = 1, \dots, m$, соответствует отбору на $(d_j + 1)$ -м шаге объекта j -го класса, $\mathbf{d}_* = d_1 + \dots + d_m$. Группу точек $\mathbf{d}, \mathbf{d}_{(j)}$, $j = 1, \dots, m$, называем $\mathbf{d}$ -пирамидой. Рассмотрим замкнутые плапы $\Pi(\Gamma)$, при которых процесс контроля прекращается при достижении траекторией границы Γ , $\Gamma \subset \mathcal{R}^m$, причем при любых $N_1, \dots, N_m$ вероятность достижения Γ равна 1. При контроле по обобщенной схеме Пойа вероятность выхода траектории

ω на границу Γ в точке $\mathbf{d}=(d_1, \dots, d_m)$ равна

$$p_N(\mathbf{d}) = \alpha_\omega \mathcal{P}_\mathbf{d}(N), \quad \mathcal{P}_\mathbf{d}(N) = \prod_{j=1}^v \prod_{i=0}^{d_j-1} (N_j + s_{ij}), \quad (2)$$

$$s_{0j}=0, \quad s_{ij} = \sum_{l=0}^i c_{il}, \quad i=1, \dots, d_j-1, \quad j=1, \dots, m, \quad \alpha_\omega = \alpha_\omega(\mathbf{d}, N, \Gamma),$$

$\mathbf{d}=(d_1, \dots, d_m)$. В соответствии с (2) вероятность первого достижения границы в точке $\mathbf{d} \in \Gamma$ равна

$$p_N(\mathbf{d}) = \alpha_\Gamma(\mathbf{d}) \cdot \mathcal{P}_\mathbf{d}(N), \quad \alpha_\Gamma(\mathbf{d}) = \sum_{\omega \in \Omega(\mathbf{0}, \mathbf{d})} \alpha_\omega, \quad (3)$$

где $\Omega(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ — множество всех ω , выходящих из $\mathbf{d}_1 \notin \Gamma$ и впервые достигающих точку $\mathbf{d}_2$, не задевая $\Gamma \setminus \mathbf{d}_2$. В схеме Пойа значение α_ω одинаково для всех ω , а вероятности (2), (3) соответственно равны

$$p_N^\Pi(\mathbf{d}) = \prod_{j=1}^m N_j^{(d_j, e)} / N^{(d, 1)}, \quad \rho_N^\Pi(\mathbf{d}) = K_\Gamma(\mathbf{0}, \mathbf{d}) \cdot p_N^\Pi(\mathbf{d}), \quad (4)$$

где $K_\Gamma(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ — число траекторий $\Omega(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$, $a^{(g, h)} = a \cdot (a+gh) \cdot \dots \cdot (a+(g-1)h)$, $h=1, 2, \dots$. Рассматриваемые как функции параметра $\Theta=N$ вероятности (3), (4) образуют на Γ семейства вероятностных мер $\mathcal{P}_{\Gamma, \Theta}$. Учитывая (3), (4), условие полноты (1) перепишем в виде

$$\sum_{\mathbf{d} \in \Gamma} \varphi(\mathbf{d}) \cdot \mathcal{P}_\mathbf{d}(N) = 0, \quad \sum_{\mathbf{d} \in \Gamma} \varphi(\mathbf{d}) \cdot p_N^\Pi(\mathbf{d}) = 0 \quad (5)$$

для всех N , $N_+ = N$, $\text{ind } \Gamma = \max \{d_i : \mathbf{d} \in \Gamma\} \leq N$.

Лемма 1. Для точек $\mathbf{d}$ -пирамиды выполнены соотношения

$$\sum_{j=1}^m a_j P_N(\mathbf{d}_{(j)}) = a_{m+1} P_N(\mathbf{d}), \quad \sum_{j=1}^m p_N^\Pi(\mathbf{d}_{(j)}) = p_N^\Pi(\mathbf{d}), \quad (6)$$

где

$$a_j = \alpha_\Gamma^{-1}(\mathbf{d}_{(j)}), \quad a_{m+1} = (N+s)^{-1} \alpha_\Gamma^{-1}(\mathbf{d}), \quad s = \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{1 \leq i \leq d_j} c_{ij}.$$

Определение 2. Естественной нумерацией точек симплекса $S_n^{m-1} = \{\mathbf{d}: \mathbf{d}=(d_1, \dots, d_m) \in \mathcal{R}^m, d_i=n\}$ называем такую, в которой номера даются в соответствии со значениями координат со старшими номерами, т. е. из двух точек $\mathbf{d}'=(d'_1, \dots, d'_m)$, $\mathbf{d}''=(d''_1, \dots, d''_m)$, у которых $d'_m = d''_m, \dots, d'_{m-l} = d''_{m-l}, d'_{m-l-1} > d''_{m-l-1}$, больший номер приписывается $\mathbf{d}'$. Естественный номер точки $\mathbf{d}$ обозначаем $e(\mathbf{d})$. Нумерацию одночленов $o_{e(\mathbf{d})} = \prod_{j=1}^m \binom{d_j-1}{j}$, $d_j=0, 1, \dots, d=d_1+\dots+d_m=n$, $e(\mathbf{d})=1, \dots, \binom{n+m-1}{m}$, называем естественной.

Определение 3. Множество точек $U = \left\{ \mathbf{a}_i \in R^m, i=1, \dots, \binom{m+n-1}{m} \right\}$

называем узловым, если $\det \|o_{ij}\| \neq 0$, где элементы матрицы $o_{ij} = O_j(\mathbf{a}_i)$ — значения j -го в естественной нумерации одночлена в точке $\mathbf{a}_i$.

Теорема 1. Симплекс S_N^{m-1} содержит узловые подмножества.

Доказательство проводим конструктивным путем, «проектируя»

S_n^{m-1} на S_N^{m-1} параллельно координатным осям.

Значения системы полиномов $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}_1(N), \dots, \mathcal{P}_f(N)\}$ в каждой из точек $N \in S \subset \mathcal{R}^m$ можно рассматривать как последовательность столбцов матрицы $A(F, S) = \|\mathcal{P}_l(N_k)\|$, $N_k \in S$, $l=1, \dots, f$, $k=1, \dots, |S|$.

Теорема 2. Для того чтобы план $\Pi(\Gamma)$ был полным, необходимо и достаточно, чтобы вероятности $P_N(d)$, $d \in \Gamma$, рассматриваемые как полиномы от N , образовывали систему линейно-независимых полиномов.

При доказательстве используется следующая лемма.

Лемма 2. Для того чтобы полиномы системы $\mathcal{F}$ были линейно-независимы, необходимо и достаточно, чтобы были линейно-независимыми строки матрицы $A(F, U)$, где U — узловое множество.

Пусть $\text{rang } \mathcal{F}_n$ — максимальное число линейно-независимых полиномов в системе полиномов $\mathcal{F}_n$, степени не выше n , $|\mathcal{F}_n| = f$, $N \in S_N^{m-1}$. $\mathcal{F}_n$ сопоставляем матрицу $C(\mathcal{F}_n) = \|c_{ij}\|$, где c_{ij} — коэффициент при i -м в естественной нумерации одночлене $o_i = o_i(N)$ у j -го полинома $\mathcal{P}_j \in \mathcal{F}_n$, $j=1, \dots, f$, $\mathcal{P}_j = \sum_i c_{ij} o_i$. Если $j \leq \binom{m+n-1}{m}$, то

$$\text{rang } C(\mathcal{F}_n) = \text{rang } \mathcal{F}_n. \quad (7)$$

Лемма 3. План $\Pi(\Gamma)$ неполный, если $|\Gamma| > |S_n^{m-1}|$, $\text{ind } \Gamma = n$.

Доказательство основано на соотношении (7).

Следствие 1. При контроле по альтернативному признаку ($m=2$) в обобщенной схеме Пойа планы $\Pi(\Gamma)$, $|\Gamma| > n+1$, не являются полными.

Из $|\Gamma| > n+1$ следует, что план $\Pi(\Gamma)$ непростой (², ⁸).

Теорема 3. Для системы полиномов $\mathcal{F}_n = \{\mathcal{P}_d(N), d \in S_n^{m-1}\}$, определяемых (2), $\text{rang } \mathcal{F}_n = |S_n^{m-1}|$.

Доказательство проводится индукцией по m .

Следствие 2. План $\Pi(S_n^{m-1})$ полный.

Плану $\Pi(\Gamma)$, $\text{ind } \Gamma = n$, при контроле по схеме Пойа, используя (6), сопоставим (структурную) матрицу $A(\Gamma) = \|a_{ij}\|$, определяемую соотношением

$$p_N^\Pi(d_i) = \sum_{d_j \in S_n^{m-1}} a_{ij} p_N^\Pi(d_j), \quad d_i \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, |\Gamma|. \quad (8)$$

Теорема 4. План $\Pi(\Gamma)$, $\text{ind } \Gamma = n$, полный тогда и только тогда, когда $\text{rang } A(\Gamma) = |\Gamma|$.

При доказательстве используются лемма 2, теоремы 2 и 3.

Следствие 3. Полнота $\Pi(\Gamma)$ определяется границей Γ и не зависит от постоянной s в схеме Пойа и объема совокупности $N \geq \text{ind } \Gamma$.

Это утверждение обобщает результаты (⁵, ⁶) об эквивалентности полноты $\Pi(\Gamma)$ для персепионального блуждания и бесповторной выборки. Эквивалентность полноты (неполноты) планов $\Pi(\Gamma)$ при контроле по схеме Пойа и обобщенной схеме Пойа получена вторым автором для планов глубины 1, у которых

$$\text{ind } d = n, \quad n-1 \quad \forall d \in \Gamma; \quad \text{ind } \Gamma = n.$$

Введем операцию последовательного просмотра точек Γ , используя последовательность параллелипипедов

$$\pi(I_k) = \{r = (r_1, \dots, r_m) : r_j = 0, \dots, l_k, \quad j=1, \dots, m\}, \quad I_k = (l_{k1}, \dots, l_{km}) \in S_N^{m-1}.$$

$$N \geq \text{ind } \Gamma, \quad k \in \{1, \dots, |S_N^{m-1}|\}.$$

Точка $d \in \pi(I_k) \cap \Gamma$ допускает просмотр на k -м шаге, если все другие точки $\pi(I_k) \cap \Gamma$ были просмотрены ранее.

Определение 4. План $\Pi(\Gamma)$ называем просматриваемым, если найдется такая последовательность $\pi(I_k)$, $I_k \in S_N^{m-1}$, $k=1, 2, \dots$, что все точки Γ допускают просмотр.

Просматриваемые планы $\Pi(\Gamma)$ являются полными ⁽⁸⁾. В работах ^(5, 6) введено понятие контролируемости плана и показано, что контролируемые планы являются полными. Следующие результаты получены вторым автором.

Теорема 5. *Множество контролируемых планов является собственным подмножеством множества просматриваемых планов.* При доказательстве используется разбиение Γ на слои $\Gamma_i = \{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m) : \mathbf{d} \in \Gamma, \text{ind } \mathbf{d} = n - i\}$, где $n = \text{ind } \Gamma$, $k = \min_{\mathbf{d} \in \Gamma} \text{ind } \mathbf{d}$, $i = 0, \dots, k$.

Примеры просматриваемых, но не контролируемых планов доказывают строгое включение множества контролируемых планов во множество просматриваемых планов.

Скажем, что план $\Pi(\Gamma)$ допускает спрямление границы в точке $\mathbf{d} \in \Gamma$, если все точки $\mathbf{d}$ -пирамиды, кроме одной $\mathbf{d}_{(j)}$, являются граничными. Спрявленную границу определяем соотношением $\Gamma_{\mathbf{d}} = \{\Gamma \setminus \mathbf{d}\} \cup \mathbf{d}_{(j)}$. Если Γ допускает спрямление в точке $\mathbf{d}$, то план $\Pi(\Gamma)$ полный тогда и только тогда, когда полный $\Pi(\Gamma_{\mathbf{d}})$.

Комбинация спрямления границы и последующего просмотра дает достаточный признак, более мощный, чем просмотр и спрямление границы по отдельности. Построены примеры $\Pi(\Gamma)$ не просматриваемых планов, у которых $\Gamma_{\mathbf{d}}$ допускает просмотр, а также полные планы, границы которых не спрямляемы и не просматриваемы.

Теорема 6. *Если в условиях обобщенной схемы Пойа замкнутый план $\Pi(\Gamma)$ не минимален ⁽⁶⁾, то он неполон.*

Ранее эта теорема была доказана только для случая биномиального блуждания ⁽⁶⁾.

Межфакультетская лаборатория статистических методов
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. A. Girshik, F. Mosteller, L. Savage, Ann. Math. Statist., v. 17, № 1, 43 (1946).
² M. De Groot, ibid., v. 30, № 1, 80 (1959). ³ Р. А. Зайдман, Ю. В. Линник, В. Н. Судаков, Советско-японск. симпозиум по теории вероятн., АН СССР, Новосибирск, 1969, стр. 122. ⁴ А. М. Казан, Ю. В. Линник, С. Р. Рао, Характеризационные задачи математической статистики, «Наука», 1972. ⁵ Р. А. Зайдман, Ю. В. Линник, И. В. Романовский, ДАН, т. 165, 1222 (1969). ⁶ Yu. Linnik, I. V. Romanovsky, Proc. VI Berkley Symp. on Math. Stat. and Probab., v. 1, Univ. Calif. Press, 1971, p. 85. ⁷ Я. П. Лумельский, ДАН, т. 209, 1281 (1973). ⁸ Ю. К. Беляев, Вероятностные методы выборочного контроля, «Наука», 1975.