

В. Н. ЧУБАРИКОВ

ОБ ОДНОМ КРАТНОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ ИНТЕГРАЛЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 13 I 1976)

В настоящей статье продолжены исследования по теории кратных тригонометрических сумм Г. Вейля (см. ^(2, 3)).

При выводе асимптотической формулы для числа решений системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = 0,$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n,$$

в натуральных $1 \leq x_{1,j}, \dots, x_{r,j} \leq P$, $1 \leq j \leq 2k$, возникает задача об оценке сверху тригонометрических интегралов

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)} dx_1 \dots dx_r \quad (1)$$

с многочленом $f(x_1, \dots, x_r)$. Для многочлена от одной переменной эта задача полностью решена (⁽¹⁾, лемма 4, гл. 2). Здесь мы доказываем оценку для кратного тригонометрического интеграла (1) (теорема 1), на основе которой исследуется вопрос сходимости одного несобственного интеграла (теорема 2). Заметим, что исследованием сходимости несобственных интегралов, подобных интегралу теоремы 2, занимался Хуа Лю-кен (⁽⁴⁾). При доказательстве теоремы 1, точнее леммы, из которой выводится теорема 1, существенно используется идея И. М. Виноградова (см. ⁽¹⁾, лемма 4, гл. 2).

Обозначения. ξ — набор действительных чисел $\alpha_{t_1, \dots, t_r}$ с условием $0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n$,

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} \alpha_{t_1, \dots, t_r} x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

$$M = (n+1)^r, \quad \alpha_{0, \dots, 0} = 0.$$

Теорема 1. Пусть

$$\alpha = \max_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} |\alpha_{t_1, \dots, t_r}|,$$

$$I = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i f_{\xi}(x_1, \dots, x_r)} dx_1 \dots dx_r.$$

Тогда

$$|I| \ll \min(1, \alpha^{-1/(rn)}).$$

Константа в знаке $\ll$ зависит только от n и r .

Теорема 2. Пусть

$$J = \int |I|^{2k} d\xi,$$

где интегрирование ведется по всем $-\infty < \alpha_{t_1, \dots, t_r} < +\infty$, $0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n$, кроме $\alpha_{0, \dots, 0}$.

Тогда I сходится при $k > rnM/2$.

Для доказательства теоремы 1 нам необходима следующая

Л е м м а. Пусть

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n, \\ \alpha = \max_{0 \leq j \leq n} |\alpha_j|, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда мера тех точек x , для которых $|f(x)| \leq \alpha^\beta$, не превосходит $\ll \alpha^{-(1-\beta)/n}$. Константа в знаке $\ll$ зависит только от n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем интервал $0 \leq x \leq 1$ на интервалы монотонности $f(x)$. Возьмем один из них и оценим длину интервала $x_1 \leq x \leq x_2$, на котором $|f(x)| \leq \alpha^\beta$. Пусть $t = (x_2 - x_1)/n$.

Из формулы бинома Ньютона имеем

$$f(x_1 + mt) = \sum_{h=0}^n \frac{f^{(h)}(x_1)}{h!} (mt)^h, \quad m=1, \dots, n.$$

Рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений с неизвестными $f^{(h)}(x_1)t^h$, получим

$$|f^{(h)}(x_1)t^h| \ll \alpha^\beta.$$

Пусть $|\alpha_k| = \alpha$. Тогда

$$|k! \alpha| = |f^{(k)}(0)| = \left| \sum_{r=k}^n \frac{f^{(r)}(x_1)}{(r-k)!} (-x_1)^{r-k} \right| \ll \alpha^\beta t^{-k} + \dots + \alpha^\beta t^{-n} \ll \alpha^\beta t^{-n}.$$

Отсюда следует, что

$$t \ll \alpha^{-(1-\beta)/n}.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 проведем индукцией по числу переменных многочлена. При $r=1$ утверждение теоремы справедливо (⁽¹⁾, гл. 2, лемма 4).

Предположим, что теорема справедлива для $r-1$ переменной. Докажем ее для r .

Без ограничения общности можно предположить, что при наибольшем по модулю коэффициенте переменная x_1 присутствует в ненулевой степени.

Запишем $f_\xi(x_1, \dots, x_r)$ в виде

$$f_\xi(x_1, \dots, x_r) = \sum_{0 \leq t_1, \dots, t_{r-1} \leq n} x_1^{t_1} \dots x_{r-1}^{t_{r-1}} \varphi_{t_1, \dots, t_{r-1}}(x_r).$$

Пусть наибольший по модулю коэффициент находится в полиноме $\varphi_{s_1, \dots, s_{r-1}}(x_r)$. E — множество точек x_r , для которых

$$|\varphi_{s_1, \dots, s_{r-1}}(x_r)| \leq \alpha^{(r-1)/r}.$$

Тогда

$$|I| \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{[0,1] \setminus E} dx_r \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)} dx_1 \dots dx_{r-1} \right|,$$

$$I_2 = \int_E dx_r.$$

По предположению индукции

$$I_1 \ll \alpha^{-[(r-1)/r] \cdot 1/(r-1)n} \ll \alpha^{-1/(rn)},$$

а по лемме имеем

$$I_2 \ll \alpha^{-1/(rn)}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Подставим оценку теоремы 1 в интеграл J и воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \min(1, \alpha^{-1/(rn)}) &= \min_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} (\min(1, |\alpha_{t_1, \dots, t_r}|^{-1/(rn)})) \leq \\ &\leq \prod_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} \min(1, |\alpha_{t_1, \dots, t_r}|^{-1/(rnM)}). \end{aligned}$$

Получим утверждение теоремы 2.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. А. Карацубе за научное руководство.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971.
² Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, ДАН, т. 222, № 5 (1975). ³ Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 40, № 1 (1976). ⁴ Hua Loo-Keng, Acta Sci. Sinica, v. 1, № 1, 1 (1952).