

Э. Г. ЯНОВИЦКИЙ

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЕ ПРИ ИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 24 XII 1975)

Проблема диффузии излучения в плоском слое рассматривалась очень подробно. Особенно детально (имея в виду его важное значение для астрофизики) исследовался вопрос об определении интенсивности излучения, выходящего из плоской атмосферы, освещенной параллельными лучами. Однако в ряде случаев важно уметь рассчитать поле излучения внутри среды, т. е. интенсивность, а значит, и поток излучения на заданной оптической глубине τ . Это необходимо при изучении изменения с глубиной в атмосфере таких характеристик, как освещенность, лучевое давление, температура и др. Как будет показано ниже, эта интенсивность и поток излучения определяются весьма простыми выражениями.

1. Рассмотрим полубесконечную плоскую атмосферу, освещенную параллельными лучами, падающими на границу под углом $\arcs \cos \mu_0$ к внешней нормали. Обозначим через μ косинус угла между направлением распространения излучения и положительным направлением оси τ , так что $\mu > 0$ для излучения, идущего в сторону роста τ (вниз). Пусть на границе атмосферы падающее излучение создает освещенность μ_0 . Если считать рассеяние света в среде изотропным, то, как показал Т. Маликин ⁽¹⁾, интенсивность излучения на глубине τ определяется выражением ($-1 \leq \mu \leq 1$)

$$(\mu - \mu_0)I(\tau, \mu, \mu_0) = -\mu_0 B(\tau, \mu_0) + \\ + 2B(0, \mu_0)\mu_0 \int_0^1 I(\tau, \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} + \mu_0 B(0, \mu_0) e^{-\tau/\mu} \theta(\mu), \quad (1)$$

где $\theta(\mu)$ — единичная функция скачка,

$$\theta(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \geq 0, \\ 0, & \mu < 0; \end{cases}$$

λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, $B(\tau, \mu_0)$ — функция источника. Полагая в (1) $\mu_0 = \mu$, для $0 \leq \mu \leq 1$ находим

$$2\mu \int_0^1 I(\tau, \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} = \frac{B(\tau, \mu)}{B(0, \mu)} - e^{-\tau/\mu}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1). В результате приходим к следующей формуле для интенсивности нисходящего излучения ($0 < \mu \leq 1$):

$$I(\tau, \mu, \mu_0) = \frac{B(0, \mu_0)B(\tau, \mu) - B(0, \mu)B(\tau, \mu_0)}{(\mu - \mu_0)B(0, \mu)} \mu_0. \quad (3)$$

Как можно показать, формула (3) будет справедлива и для $-1 \leq \mu \leq 0$, если ввести общую функцию источника для $-1 \leq \mu \leq 1$ при по-

мощи уравнения

$$T(\mu)B(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4} e^{-\tau/\mu} \left(\frac{\tau}{\mu} \right) + \frac{\lambda}{2} \mu \int_0^1 \frac{B(\tau, \mu')}{\mu' - \mu} d\mu', \quad (4)$$

которое для $0 \leq \mu \leq 1$ получено в работе автора ⁽²⁾. Здесь

$$T(\mu) = 1 - \frac{\lambda}{2} \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}. \quad (5)$$

При этом следует принять во внимание соотношение Chandrasekhara ⁽³⁾

$$B(0, \mu)B(0, -\mu) = \lambda^2/16T(\mu). \quad (6)$$

Действительно, из (1) легко находим ($0 \leq \mu \leq 1$)

$$\int_0^1 I(\tau, -\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} = \frac{4}{\lambda} B(0, \mu) \int_0^1 \frac{B(\tau, \mu')}{\mu + \mu'} d\mu', \quad (7)$$

откуда, учитывая (1), получаем (для $0 \leq \mu \leq 1$)

$$I(\tau, -\mu, \mu_0) = \frac{B(\tau, \mu_0)}{\mu + \mu_0} \mu_0 + \frac{8}{\lambda} \mu \mu_0 \frac{B(0, \mu)B(0, \mu_0)}{\mu + \mu_0} \int_0^1 \frac{B(\tau, \mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (8)$$

Как легко проверить, такое же выражение для интенсивности получается из (3), если воспользоваться формулами (4) и (6).

Формула (3) показывает, что интенсивность излучения как на границе, так и внутри атмосферы на оптической глубине τ полностью определяется заданием обобщенной функции источника только на этой глубине и границе. При этом для вычисления интенсивности не требуется проводить интегрирование ни по пространственной координате, ни по углам. По существу результат, даваемый формулой (3), является обобщением на произвольную оптическую глубину известной формулы В. А. Амбарцумяна ⁽⁴⁾, справедливой лишь для $\tau=0$.

Формулы (3) и (8) впервые получены другим способом в работе Э. Х. Даниеляна и М. А. Мнацаканяна ⁽⁵⁾ и независимо автором *. Отметим также, что формула (3) для $0 \leq \mu \leq 1$ есть тривиальное следствие, вытекающее из выражений, полученных в статье автора ⁽²⁾ (ср. формулы (8), (9) и (10) этой работы). Для анизотропного рассеяния выражение (1) было найдено в работе Иванова ⁽⁶⁾.

Функция источника $B(\tau, \mu)$ может быть получена, например, с помощью уравнения (4). Однако при численном нахождении $B(\tau, \mu)$, по-видимому, лучше всего воспользоваться следующим обстоятельством. В работе В. В. Иванова ⁽⁶⁾ приводится формула

$$B(\tau + \tau_1, \mu_0) = B(\tau, \mu_0) e^{-\tau_1/\mu_0} + 2 \int_0^1 I(\tau_1, \mu', \mu_0) B(\tau, \mu') d\mu', \quad (9)$$

где τ и τ_1 — произвольные оптические глубины. Подставляя сюда выражение (3), получаем следующую формулу сложения:

$$B(\tau + \tau_1, \mu_0) = B(\tau, \mu_0) e^{-\tau_1/\mu_0} + 2\mu_0 \int_0^1 \frac{B(0, \mu_0)B(\tau_1, \mu) - B(0, \mu)B(\tau_1, \mu_0)}{\mu - \mu_0} \frac{B(\tau, \mu)}{B(0, \mu)} d\mu, \quad (10)$$

* Когда предварительный вариант рукописи настоящей работы был подготовлен к печати, В. А. Амбарцумян любезно обратил наше внимание на работу ⁽⁵⁾.

из которой при $\tau_1 = \tau$ следует формула удвоения. Следовательно, найдя $B(0, \mu)$ (иными словами, φ -функцию Амбарцумяна) и определив $B(\tau, \mu)$ на достаточно малой оптической глубине τ , с помощью формулы удвоения легко рассчитать функцию источника на любой оптической глубине.

Приведем некоторые примеры использования основной формулы (3).

2. Для потока $H(\tau, \mu_0)$ диффузного излучения в среде с помощью формул (3) и (8), используя (4) и (6), получаем следующее выражение:

$$H(\tau, \mu_0) + \pi \mu_0 e^{-\tau/\mu_0} = \mu_0 \frac{2b_0(\tau)}{(1-\lambda)^{1/2}} S(0, \mu_0) + S(\tau, \mu_0) \mu_0; \quad (11)$$

здесь обозначено

$$b_0(\tau) = \int_0^1 B(\tau, \mu) d\mu, \quad (12)$$

а функция стока $S(\tau, \mu_0) = 4\pi(1-\lambda)B(\tau, \mu_0)/\lambda$ определяет количество лучистой энергии, поглощенное единичным объемом атмосферы в единицу времени на оптической глубине τ .

Как из формулы (11), так и непосредственно из уравнения переноса легко получить, что

$$\frac{dH(\tau, \mu_0)}{d\tau} = -S(\tau, \mu_0) + \pi e^{-\tau/\mu_0}. \quad (13)$$

Интегрируя это уравнение от τ_1 до τ_2 ($\tau_2 > \tau_1$) и сравнивая полученный результат с (11), легко находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau, \mu_0) d\tau &= S(\tau_1, \mu_0) - S(\tau_2, \mu_0) + \\ &+ \frac{2[b_0(\tau_1) - b_0(\tau_2)]S(0, \mu_0)}{(1-\lambda)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

т. е. выражение для полного количества лучистой энергии, поглощенной в слое атмосферы между оптическими уровнями τ_1 и τ_2 .

Таким образом, вычисление потока излучения в полубесконечной атмосфере и распределение с глубиной количества поглощенной энергии также сводится лишь к нахождению функции источника $B(\tau, \mu)$ и ее нулевого момента $b_0(\tau)$ по μ . Какого-либо интегрирования по τ не требуется.

3. Рассмотрим теперь классическую задачу астрофизики — проблему Милна (полубесконечная атмосфера с источниками на бесконечности). Обозначим $B(\tau)$ функцию источника в этой задаче. В таком случае вместо соотношения (1) будем иметь ⁽⁶⁾ следующее выражение для интенсивности $I(\tau, \mu)$ в задаче Милна ($-1 \leq \mu \leq 1$):

$$(1+k\mu)I(\tau, \mu) = B(\tau) - B(0) \left[2\mu \int_0^1 I(\tau, \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} + e^{-\tau/\mu} \theta(\mu) \right] \quad (15)$$

при граничном условии $I(0, \mu) = 0$ ($\mu > 0$); здесь k — решение характеристического уравнения $\lambda \ln[(1+k)/(1-k)] = 2k$.

Учитывая, что $B(\tau) = I(\tau, 0)$, и воспользовавшись (2) и (7) для всего интервала $-1 \leq \mu \leq 1$, из (15) получаем (для $\mu < 0$ следует иметь в виду формулы (4) и (6))

$$B(\tau, \mu) = B(0, \mu) [I(\tau, 0) - (1+k\mu)I(\tau, \mu)] / I(0, 0). \quad (16)$$

Для границы имеем (для $\mu \geq 0$) (см. монографию В. В. Соболева ⁽⁷⁾)

$$B(0, \mu) = \lambda I(0, -\mu) (1-k\mu) / 4I(0, 0). \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) показывают, что не только задание интенсивности в задаче о диффузном отражении определяет милновскую интенсивность (это было доказано Ивановым ⁽⁶⁾ для более общего случая анизотропного рассеяния), но и задание последней полностью определяет $B(\tau, \mu)$, а следовательно, интенсивность в задаче о диффузном отражении. Таким образом, мы доказали эквивалентность этих задач.

Ряд полученных здесь результатов может быть обобщен на случай полного перераспределения по частотам, анизотропного рассеяния и среды конечной оптической толщины.

Главная астрономическая обсерватория
Академии наук УССР
Киев

Поступило
6 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

T. W. Mullikin, Proc. Interdisciplinary Conf. on Electromagnetic Scattering, Univ. of Massachusetts, 1965, p. 697. ² *Э. Г. Яновицкий*, Астр. журн., т. 41, 898 (1964). ³ *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953. ⁴ *В. А. Амбарцумян*, Астр. журн., т. 19, 30 (1942); ДАН, т. 38, 257 (1943). ⁵ *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской астрофизич. обс., т. 46, 101 (1957). ⁶ *В. В. Иванов*, Астр. журн., т. 52, 217 (1975). ⁷ *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.