

УДК 531.51+532.592

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Н. ГОЛУБЯТНИКОВ

О СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОМ ДВИЖЕНИИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 29 XII 1975)

Рассмотрим в рамках ньютоновской механики задачу о неустановившемся сферически-симметричном движении гравитирующего совершенного газа при наличии сильной ударной волны*.

Уравнения адиабатического движения гравитирующего совершенного газа в случае сферической симметрии имеют вид

$$\ddot{r} + 4\pi r^2 p' + km/r^2 = 0, \quad p = (\gamma - 1)f(m)\rho^\gamma, \quad \rho = 1/(4\pi r^2 r'), \quad (1)$$

где $r=r(m, t)$ — закон движения газа; m — масса слоя радиуса r , играющая роль лагранжевой переменной; p — давление; ρ — плотность; функция $f(m)$ связана с распределением энтропии.

Пусть $m=M(t)$ — закон движения сильной ударной волны. Тогда из условий на разрыве следует, что

$$\dot{M} = \pm 4\pi r^2 p_2 [2(U - Q)]^{-1/2}, \quad \dot{r}_1 = \dot{r}_2 - 4\pi r^2 p_2 / \dot{M}; \quad (2)$$

здесь $U=f(m)\rho^{\gamma-1}$ — внутренняя энергия газа и Q — величина выделяющейся энергии в расчете на единицу массы. Единицей обозначено состояние газа перед ударной волной. Знак определяется направлением движения ударной волны.

Очевидно, что уравнения для закона движения ударной волны легко интегрируются, если решение за ударной волной допускает разделение переменных или группу симметрии**. Сюда относятся все известные решения уравнений (1) при $p \neq 0$ (1, 2).

При $f=0$ уравнения (1) могут быть проинтегрированы:

$$\dot{r}^2/2 - km/r = h(m). \quad (3)$$

Из условий (2), зная закон движения ударной волны, легко определить функцию $h(m)$, исключив $t=T(m)$, $\dot{M}(T(m))=m$: $h(m) = \dot{r}_2^2/2 + U_2 - km/r - 4\pi r^2 \dot{r}_2 p_2 / \dot{M} - Q$. В зависимости от знака $h(m)$, интегрируя уравнение (3), получим три типа движения: эллиптическое, параболическое и гиперболическое. В параметрическом виде

$$h < 0: \quad r = {}^{1/2} km |h|^{-1} (1 - \cos \eta), \quad t_0(m) - t = km \cdot |2h|^{-1/2} (\eta - \sin \eta);$$

$$h = 0: \quad r = (9km/2)^{1/2} (t_0(m) - t)^{2/3};$$

$$h > 0: \quad r = {}^{1/2} km h^{-1} (\cosh \eta - 1), \quad t_0(m) - t = km \cdot (2h)^{-1/2} (\sinh \eta - \eta).$$

Функция $t_0(m)$ определяется из условия непрерывности r на ударной волне путем исключения $t=T(m)$ и параметра η .

* По существу настоящая работа является естественным приложением, учитывающим влияние гравитации, постановки Л. И. Седова задачи о сильном взрыве (1).

** Основная группа симметрии уравнений (1), вычисленная после исключения функции $f(m)$, имеет следующую алгебру Ли:

$X_1 = \partial/\partial t$, $X_2 = 3m \partial/\partial m + r \partial/\partial r + 2p \partial/\partial p$, $X_3 = t \partial/\partial t - 2m \partial/\partial m - 2r \partial/\partial r - 4p \partial/\partial p$, откуда следует, что инвариантно-групповыми решениями являются только статические, различные автомодельные и предельные к ним решения.

Конечно, основную трудность в данной задаче составляет исследование поведения решения при $p=0$, связанное с доказательством существования глобального решения. Непосредственный анализ неравенства $r'(m, t(m, \eta)) > 0$ при всех конечных $\eta > 0$ и фиксированном m приводит в гиперболическом и параболическом случаях к следующему критерию продолжимости решения при $p=0$ до $t \rightarrow -\infty$: $h' \geq 0$, $t_0' \geq 0$. В эллиптическом случае решение существует при $0 < \eta \leq \pi$, если выполнены условия $(m/|h|)' \geq 0$, $t_0' \geq 0$. Значение $\eta = \pi$ соответствует $\dot{r} = 0$. Для исследования существования решения при $\eta < 0$ следует просто изменить знак времени, при этом $t_0' \leq 0$, остальные неравенства те же.

Приведем без доказательства простое неравенство, справедливое при отсутствии выделения энергии:

$$V^{3(\gamma-1)}/F(M_0) - kV \leq E; \quad (4)$$

$$V = \int_0^{M_0} \frac{m dm}{r}, \quad f_1 = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1-\gamma} \left[\int_0^m f_0^{1/\gamma}(\mu) d\mu \right]^\gamma, \quad F = \left[\int_0^{M_0} \frac{m dm}{f_1^{1/3(\gamma-1)}(m)} \right]^{3(\gamma-1)}$$

где M_0 — масса тела, E — его энергия и $f_0(m)$ — значение функции $f(m)$ в некоторый «начальный» момент времени. Если неравенство позволяет оценить V сверху, то отсюда следует оценка радиуса тела снизу. Это дает возможность судить о дальнейшем максимальном сжатии газа, подставив в неравенство значение функции $f(m)$, вычисленное после прохождения сильной ударной волны.

Приведем несколько конкретных простых примеров решений автомодельных задач. В качестве первого примера рассмотрим задачу о формировании статического распределения газа за расходящейся сильной ударной волной. Используя критерии продолжимости решения перед ударной волной по времени, легко показать, что при этом не может возникнуть регулярное решение, пригодное для описания равновесного состояния конечного тела. При $m=0$ $h=U-km/r-Q=U-Q>0$, а на границе тела $U=Q=0$, $h<0$. Следовательно, существует область значений m с $h>0$, $h'<0$, в которой решение не продолжается до $t \rightarrow -\infty$. Однако возможны различные автомодельные решения, содержащие сингулярность при $r=0$.

Пусть статическое решение за ударной волной определяется только двумя постоянными k и A , $[A]=L^2/T$. Тогда полное решение задачи представляется следующими формулами ($Q=0$):

$$\begin{aligned} r_2 &= r_0 \left(\frac{m k}{A^2} \right)^{1/(3-2\alpha)}, \quad p_2 = \frac{3-2\alpha}{8\pi r_0^4 (2\alpha-1)} \left(\frac{m^{2-4\alpha} A^8}{k^{1+2\alpha}} \right)^{1/(3-2\alpha)} \\ \rho_2 &= \frac{3-2\alpha}{4\pi r_0^3} \left(\frac{A^6}{m^{2\alpha} k^3} \right)^{1/(3-2\alpha)} \\ f &= \frac{(4\pi r_0^3)^{\gamma-1}}{2r_0(\gamma-1)(2\alpha-1)(3-2\alpha)^{\gamma-1}} (m^{2-4\alpha+2\alpha\gamma} k^{3\gamma-1-2\alpha} A^{8-6\gamma})^{1/(3-2\alpha)}, \\ M &= \left[\frac{\gamma-1}{4r_0^3(2\alpha-1)} \right]^{(3-2\alpha)/2\alpha} \frac{A^{4\alpha-3}}{k} t^{(3-2)/\alpha}, \\ h &= \frac{4(1-\gamma)\alpha+2\gamma-1}{2r_0(\gamma-1)(2\alpha-1)} (mk)^{2(\alpha-1)/(2\alpha-3)} A^{2/(3-2\alpha)}; \\ 1^0) \quad h < 0: \quad \frac{(2\gamma-1)}{4(\gamma-1)} < \alpha < 5/4, \quad \gamma > 4/3; \quad \cos \eta_0 &= \frac{\gamma-2\alpha(\gamma-1)}{(\gamma-1)(2\alpha-1)}. \\ t_0 &= \left[\frac{\eta_0 - \sin \eta_0}{(1 - \cos \eta_0)^{3/2}} + 2 \left(\frac{2\alpha-1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \right] r_0^{1/2} (km)^{\alpha/(3-2\alpha)} A^{(3-4\alpha)/(3-2\alpha)}. \end{aligned}$$

$$2^0) \quad h=0: \quad \alpha=(2\gamma-1)/4(\gamma-1), \quad \gamma>^{5/4},$$

$$t_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + 2 \left(\frac{2\alpha-1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \right) r_0^{3/2} (km)^{\alpha/(3-2\alpha)} A^{(3-4\alpha)/(3-2\alpha)};$$

$$3^0) \quad h<0: \quad 1/2 < \alpha < (2\gamma-1)/4(\gamma-1) \quad \text{при} \quad \gamma>^{3/2} \quad \text{или} \quad 1/2 < \alpha \leq 1 \quad \text{при} \quad \gamma \leq^{3/2},$$

$$t_0 = \left[\frac{\operatorname{sh} \eta_0 - \eta_0}{(\operatorname{ch} \eta_0 - 1)^{3/2}} + 2 \left(\frac{2\alpha-1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \right] r_0^{3/2} (km)^{\alpha/(3-2\alpha)} A^{(3-4\alpha)/(3-2\alpha)}$$

$$\operatorname{ch} \eta_0 = [\gamma - 2\alpha(\gamma-1)] / (\gamma-1)(2\alpha-1).$$

Здесь r_0 — произвольная безразмерная постоянная. Отброшены случаи расходимости интеграла энергии. Выделения энергии при образовании ударной волны нет. Оценка (4) имеет смысл при $\gamma>^{4/3}$, $\alpha<^{5/4}$,

$$F = \frac{2(2-4\alpha+3\gamma)^{\gamma}(\gamma-1)r_0^{4-3\gamma}}{3^{\gamma-1}\gamma^{\gamma}(3-2\alpha)} \left[\frac{3(\gamma-1)(3-2\alpha)}{(3\gamma-4)(5-4\alpha)} \right]^{3(\gamma-1)} \times$$

$$\times [M_0^{(3\gamma-4)(5-4\alpha)} k^{1+2\alpha-3\gamma} A^{6\gamma-8}]^{1/(3-2\alpha)}.$$

В случае $\alpha=1$ автомодельность не нарушится, если будет иметь место постоянное выделение энергии Q на ударной волне (сферическая детонация). При этом $Q=Q_0 A^2$,

$$M = \frac{tA}{2r_0^2 k [1/r_0(\gamma-1) - 2Q_0]^{1/2}}, \quad h = \left[\frac{3-2\gamma}{2r_0(\gamma-1)} - Q_0 \right] A^2$$

и в выражениях для функции $t_0(m)$ вместо члена $((2\alpha-1)/(\gamma-1))^{1/2}$ надо подставить $(1/(\gamma-1) - 2r_0 Q_0)^{1/2}$.

В качестве второго примера рассмотрим автомодельную задачу о формировании однородного параболического движения газа. Решение уравнений (1) в области за ударной волной имеет вид

$$r_2 = (9km/2)^{1/3} |t|^{2/3}, \quad p_2 = B\rho_2^\gamma, \quad \rho_2 = 1/(6\pi k t^2), \quad f = B/(\gamma-1) = \text{const.}$$

Решение перед ударной волной представимо формулами ($Q=0$)

$$M = \beta^3 |t|^{4-3\gamma} B^{3/2} k^{(1-3\gamma)/2}, \quad \beta = \frac{2|4-3\gamma|^{(9/2)^{1/3}} (6\pi)^{(\gamma-1)/2}}{3\sqrt{2}(\gamma-1)},$$

$$h = \frac{(6-5\gamma)\beta^{-6(\gamma-1)/(4-3\gamma)}}{(6\pi)^{\gamma-1}(\gamma-1)(4-3\gamma)} [m^{2(1-\gamma)} B k^{3(1-\gamma)}]^{1/(4-3\gamma)}.$$

При $\gamma=^{4/3}$ движение газа будет в целом неавтомодельным. При $1 < \gamma < ^{4/3}$ ударная волна выходит из центра в момент времени $t=0$, который является особой точкой решения, соответствующего разлету газа. При $^{6/5} < \gamma < ^{4/3}$ интеграл энергии всегда расходится и выделяется бесконечно большая энергия, при $1 < \gamma < ^{6/5}$ решение не продолжается до $t \rightarrow -\infty$. Случай $\gamma=^{6/5}$ соответствует выделению конечной энергии (сильный взрыв) $E=75\sqrt{5} B^{5/2} / (16\sqrt{3}\pi k^{3/2})$; при этом

$$t_0 = 2 \left[\frac{4}{3\sqrt{10}} - \frac{9}{2} \right]^{1/2} (6\pi)^{1/10} m^{5/2} k^{13/4} B^{-15/4}, \quad h=0,$$

однако неравенство (4) не дает оценки V сверху.

При $\gamma>^{4/3}$ движение газа перед ударной волной гиперболическое:

$$t_0 = \left[\frac{3(\operatorname{sh} \eta_0 - \eta_0)}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \eta_0 - 1)^{3/2}} - 1 \right]^{3/(4-3\gamma)} \left(\frac{mk^{(3\gamma-1)/2}}{B^3} \right)^{1/(4-3\gamma)},$$

$$\operatorname{ch} \eta_0 = 1 + 2(3\gamma-4)(5\gamma-6)/(\gamma-1)^2.$$

Ударная волна возникает при $t = -\infty$, $m = 0$, при этом частицы газа продолжают падать к центру с параболической скоростью;

$$F = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\gamma-1} \frac{\gamma-1}{B} \left(\frac{5\gamma-6}{3\gamma-3}\right)^{3\gamma-3} M_0^{5\gamma-6}.$$

В случае $\gamma = 4/3$ рассмотрим задачу о формировании автомодельного разлета газа вида *

$$r_2 = \left(\frac{3mkt^2}{4\pi R_0}\right)^{1/4}, \quad \rho_2 = \frac{R_0}{kt^2}, \quad p_2 = \left(\frac{3m}{4\pi R_0}\right)^{2/3} k^{-1/3} t^{-8/3} \left(\frac{R_0}{9} - \frac{2\pi}{3} R_0^2\right),$$

$$f = k \left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{3R_0} - 2\pi\right), \quad 0 < R_0 < \frac{1}{6\pi};$$

при этом $(Q=0) \quad M = Dt^3, \quad \delta = (1/6 - \pi R_0)^{1/2},$

$$h = 2/3 \delta (5\delta - 2) [3k / (4\pi R_0)]^{2/3} D^{2/(3\delta)} m^{2(\delta-1)/3\delta},$$

где D — произвольная постоянная.

В случае $h=0$, $R_0 = 1/(150\pi)$ при $t=0$, $m=0$ выделяется конечная энергия (сильный взрыв) $E = D^{5/3} k^{2/3} \cdot 24/625 \cdot (225/2)^{2/3}$, $t_0 = 6(m/D)^{3/2}$. Величина $F(M_0)$ в неравенстве (4) расходится.

При $1/(150\pi) < R_0 < 1/(6\pi)$ интеграл энергии, вычисленный до образования ударной волны, расходится и выделяется бесконечная положительная энергия, движение эллиптическое. При $0 < R_0 < 1/(150\pi)$ выделения энергии нет, движение гиперболическое, но в силу $h' < 0$ оно не продолжается до $t \rightarrow -\infty$.

В заключение отметим, что описанный выше способ построения решений уравнений движения гравитирующего газа легко применим и в общей теории относительности, однако неравенство типа (4) в этом случае является более слабым.

Автор выражает глубокую признательность акад. Л. И. Седову за обсуждение данной работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, «Наука», 1972.
- ² К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, «Наука», 1971.

* Это решение, а также класс статических автомодельных решений, с точки зрения основной группы уравнений (1), G_3 обладают максимально возможной симметрией G_2 .