

Р. Ю. БЕНТКУС, И. Г. ЖУРБЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 II 1976)

Вопросам статистических оценок спектральных плотностей и спектральных средних стационарных случайных процессов посвящена многочисленная литература. Большой интерес представляют простые условия состоятельности и асимптотической нормальности этих оценок при неограниченно возрастающем объеме выборки. В работах ⁽¹⁻⁴⁾ данную задачу решают в различных, трудно проверяемых ограничениях на старшие семинварианты, или старшие спектральные плотности. Асимптотическую нормальность спектральных оценок в этих работах доказывают методом моментов и условия соответственно формулируют на все смешанные семинварианты или на все старшие спектральные плотности и т. д. В предлагаемой работе условия состоятельности и асимптотической нормальности рассматриваемых оценок формулируем в терминах перемешивания случайных процессов по Розенблатту. Требуем, чтобы коэффициент перемешивания убывал с экспоненциальной скоростью. Это условие оказывается достаточным для применимости метода моментов для доказательства асимптотической нормальности. Заметим, что во многих примерах стационарных процессов такие условия перемешивания оказываются вполне естественными. В работе рассматриваем случай одномерной случайной последовательности, однако все полученные результаты можно перенести на случаи многомерных процессов и случайных полей.

Пусть $X(t)$, $t = \dots -1, 0, 1, \dots$ стационарный случайный процесс, принимающий только действительные значения, причем $M(X) = 0$. Будем считать, что процесс $X(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$. По выборке $\{X(0), \dots, X(N-1)\}$ построим периодограмму

$$J_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=0}^{N-1} X(t) e^{-it\lambda} \right|^2.$$

В дальнейшем будем рассматривать статистику

$$\tilde{A}(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) J_N(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

спектрального среднего

$$A(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

и статистику

$$\hat{f}(\lambda_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(\lambda - \lambda_0) J_N(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

спектральной плотности $f(\lambda_0)$ стационарного процесса $X(t)$. Заметим, что при выборе

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases}$$

$\hat{A}(\varphi)$ является статистикой спектральной функции $F(\lambda_0)$ процесса $X(t)$. При $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda k}$ $\hat{A}(\varphi)$ является статистикой корреляционной функции $B(k)$. Точно также $\hat{f}(\lambda)$ является статистикой $f(\lambda)$. В дальнейшем, не ограничивая общности, мы предполагаем все рассматриваемые функции периодическими с периодом 2π . Пусть далее функция $\varphi(\lambda)$ ограничена, а последовательность $\varphi_N(x)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$1) \sup_N \int_{\Pi} |\varphi_N(x)| dx < \infty.$$

2) Функции φ_N все четные и

$$\int_{\Pi} \varphi_N(x) dx = 1, \quad N=1, 2, \dots$$

3) При любом $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Pi \setminus \{|x| \leq \delta\}} |\varphi_N(x)| dx = 0$$

и при некотором целом $l > 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{NB_N} \int_{\Pi} |x|^l |\varphi_N(x)| dx = 0,$$

причем при $k < l$

$$\int_{\Pi} x^k \varphi_N(x) dx = 0.$$

4) При любом $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|h| < \delta N^{-1}} \int_{\Pi} |\varphi_N(x-h) - \varphi_N(x)| dx = 0.$$

5) Существует последовательность чисел B_N , $N=1, 2, \dots$, $0 < B_N \leq 1$, $B_N \rightarrow 0$, $NB_N \rightarrow \infty$ такая, что

$$\sup_{x, N} B_N |\varphi_N(x)| < \infty$$

и существует предел

$$\Delta = 2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} B_N \int_{\Pi} \varphi_N^2(x) dx < \infty.$$

Приведем пример последовательности $\varphi_N(x)$, удовлетворяющей перечисленным выше свойствам. Пусть $0 < B_N \leq 1$, $B_N \rightarrow 0$, $NB_N \rightarrow \infty$ и пусть $\varphi(x)$ — некоторая ограниченная на Π функция, такая, что $\int_{\Pi} \varphi(x) dx = 1$.

Будем считать, что для некоторого $l > 0$ выполняется

$$NB_N^{3+2l} \rightarrow 0,$$

причем при $k \leq l$

$$\int_{\Pi} x^k \varphi(x) dx = 0.$$

Пусть

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} B_N^{-1} \varphi(B_N^{-1} x), & |x| \leq \pi B_N \\ 0, & \pi B_N < |x| \leq \pi \end{cases}$$

в таком случае φ_N удовлетворяет условиям 1)–5), при этом

$$\Delta = 2\pi \int_{\Pi} \varphi^2(x) dx.$$

Случайный процесс $X(t)$ называется удовлетворяющим условию перемешивания по Розенблатту, если

$$\alpha(\tau) = \sup_{t, B_1, B_2} |P(B_1 B_2) - P(B_1)P(B_2)| \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0,$$

где $B_1 \in \mathfrak{A}_{-\infty}^t$, $B_2 \in \mathfrak{A}_{t+\infty}^{\infty}$, $\mathfrak{A}_k^l$ — σ -алгебра, порожденная случайными величинами $X(t)$, $k \leq t \leq l$. Мы будем предполагать, что имеет место неравенство

$$\alpha(\tau) \leq K e^{-\beta \tau}, \quad K > 0, \quad \beta > 0. \quad (3)$$

Если процесс $X(t)$ имеет абсолютные моменты до n -го порядка включительно, то существуют смешанные семинварианты $S_n(t_1, \dots, t_n)$ и определяются следующим образом:

$$S_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \ln M \exp \{i \alpha_1 X(t_1) + \dots + i \alpha_n X(t_n)\} |_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}.$$

Спектральную плотность n -го порядка, если она существует, определим из равенства

$$S_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{\Pi^n} f_n(\lambda_1 \dots \lambda_n) \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n t_k \lambda_k \right\} \delta^*(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) d\lambda,$$

где

$$\delta^*(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + 2k\pi),$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Заметим, что $f_2(\lambda_1, \lambda_2)$ как функция одного переменного на прямой $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ является обычной спектральной плотностью стационарного процесса $X(t)$.

Обозначим

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \pmod{2\pi} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

тогда справедлива следующая

Теорема. Пусть для стационарного процесса $X(t)$ существуют все моменты и выполняется условие перемешивания (3). Пусть функции $\varphi(x)$, $\varphi_N(x)$ удовлетворяют перечисленным выше свойствам, тогда определены все нижеследующие выражения и справедливы следующие утверждения:

1. Случайная величина

$$\sqrt{N}(\hat{A}(\varphi) - A(\varphi))$$

асимптотически нормальна со средним 0 и дисперсией

$$\begin{aligned} \sigma^2 = 2\pi \left\{ \int_{\Pi^2} \varphi(x) \varphi(y) f_*(x, -x, y, -y) dx dy + \right. \\ \left. + \int_{\Pi} \varphi(x) [\varphi(x) + \varphi(-x)] f^2(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

2. Конечномерные распределения процесса

$$\sqrt{N B_N} [\hat{f}(\lambda) - f(\lambda)], \quad \lambda \in \Pi$$

сходятся по распределению к соответствующим распределениям гауссовского случайного процесса $\xi(\lambda)$ со средним 0 и вторыми моментами

$$M\xi(\lambda_1)\xi(\lambda_2)=[\eta(\lambda_1-\lambda_2)+\eta(\lambda_1+\lambda_2)]\Delta f^2(\lambda_1).$$

Доказательство теоремы основано на использовании результатов работы ⁽³⁾ о спектральных плотностях в условиях перемешивания по Розенблатту, а также на использовании результатов статьи первого из авторов, которая будет опубликована в журнале «Литовский математический сборник». Доказательство проводится методом моментов.

Аналогичные результаты об асимптотической нормальности спектральных оценок (1), (2) были получены в работе ⁽¹⁾. При этом в качестве основного использовалось следующее условие. Пусть для каждого $j=1, \dots, n-1$ при всех $n=2, 3, \dots$ справедливо

$$\sum_{t_1, \dots, t_{n-1}} |t_j S_n(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})| < \infty, \quad (4)$$

где сумма берется по всем упорядоченным наборам $t_1, \dots, t_{n-1}$ целых чисел t_j , при этом считаем $t_0=0$. Используя результаты работы ⁽³⁾, условия (4) можно вывести из условия перемешивания (3). Этим самым в условиях (3) будет доказана применимость всех результатов работы ⁽¹⁾.

Институт физики и математики
Академии наук ЛитССР
Вильнюс

Поступило
27 II 1976

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. Brillinger, Biometrika, v. 56, 375 (1969). ² E. Parzen, Ann. Math. Statistics, v. 28, № 2, 329 (1957). ³ G. Maruyama, III Советско-японский Симпозиум по теории вероятностей, Ташкент, 1975, стр. 163. ⁴ Р. Бенгкус, Литов. матем. сб., т. 12, 3, 5 (1972). ⁵ И. Журбенко, Н. Зуев, Укр. матем. журн., т. 27, 4 452 (1975).