

УДК 517.917+519.217

МАТЕМАТИКА

М. В. ЯКОБСОН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАРКОВСКИХ РАЗБИЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 IX 1975)

1. Пусть f — диффеоморфизм компактного риманова многообразия M , $\Omega(f)$ — множество неблуждающих точек f . Понятие марковского разбиения многообразия M относительно диффеоморфизма f было предложено Я. Г. Синаем ⁽¹⁾ для случая Y -диффеоморфизма Д. В. Аносова ⁽²⁾. Р. Боуэн в ⁽³⁾ обобщил этот результат на случай диффеоморфизма, удовлетворяющего «аксиоме А» С. Смейла. Фактически построение марковского разбиения в ⁽³⁾ проведено для более широкого класса динамических систем, чем $f|_{\Omega(f)}$, а именно для A^* -гомеоморфизмов, удовлетворяющих сформулированной ниже аксиоме A^* .

Пусть $f: X \rightarrow X$ — гомеоморфизм компактного метрического пространства. Обозначим $W_\gamma^s(x) = \{y: d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, n \geq 0\}$, $W_\gamma^u(x) = \{y: d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, n \leq 0\}$.

Аксиома A^* . Существуют такие $0 < \lambda < 1$, ε , $\gamma > 0$, что:

1) если $z, y \in W_\gamma^s(x)$ ($W_\gamma^u(x)$), то $d(f^n(z), f^n(y)) < \lambda^n d(z, y)$ при $n \geq 0$ (при $n \leq 0$);

2) если $d(x, y) \leq \varepsilon$, то пересечение $W_\gamma^s(x) \cap W_\gamma^u(y)$ состоит из единственной точки, которую мы обозначим $[x, y]$, и отображение $[\cdot, \cdot]: \{(x, y) \in \varepsilon X \times X, d(x, y) \leq \varepsilon\} \rightarrow X$ непрерывно.

Если Λ — компактное, инвариантное, локально-максимальное, гиперболическое относительно диффеоморфизма f множество (см. ⁽⁴⁾, § 5), то ограничение $f|_\Lambda$ удовлетворяет аксиоме A^* (примером может служить множество $\Lambda = \Omega(f)$ для диффеоморфизма f , удовлетворяющего «аксиоме А» С. Смейла).

Замечания. а) Традиционное определение гиперболичности $f|_\Lambda$ состоит в том, что при $z, y \in W_\gamma^s(x)$ ($W_\gamma^u(x)$) и $n \geq 0$ ($n \leq 0$), $d(f^n(z), f^n(y)) < c \lambda^n d(z, y)$, где c и λ называются константами гиперболичности. Вводя на M ляпуновскую метрику d' (см. ⁽²⁾, § 7), эквивалентную метрике d , мы приходим к 1) с $(\lambda' = \lambda'(c, \lambda))$.

б) Пересечение $[x, y] \in M$ определено и непрерывно для достаточно близких точек $x, y \in \Lambda$ любого гиперболического множества $\Lambda \subset M$; при этом локальная максимальность Λ эквивалентна тому, что $[x, y] \in \Lambda$ при $x, y \in \Lambda$.

Пусть $f: X \rightarrow X$ удовлетворяет аксиоме A^* . Тогда (см. ⁽³⁾) для всякого $0 < \delta \leq \gamma$ существует такое $\varepsilon(\delta) > 0$, что если $d(x, y) < \varepsilon(\delta)$, то $[x, y] \in W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y)$.

Определение 1 (см. ⁽³⁾). Определим индуктивно последовательность $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots$, где $\alpha_0 = \gamma$, α_{n+1} — максимальное число, удовлетворяющее следующим условиям: $\alpha_{n+1} \leq \frac{1}{3} \min(\frac{1}{3} \alpha_n, \varepsilon(\frac{1}{3} \alpha_n))$; из $d(x, y) \leq \alpha_{n+1}$ следует $d(f(x), f(y)) \leq \alpha_n$, $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \alpha_n$.

Определение 2 ^(1, 3). Параллелограммом называется такое множество $E \subset X$, что $\text{diam } E < \alpha_3$, $\overline{\text{int } E} = E$ и из $x, y \in E$ следует $[x, y] \in E$.

При $x \in E$ определяются локальные слои точки x в E : сжимающийся — $W^s(x, E) = W_\gamma^s(x) \cap E$ и расширяющийся $W^u(x, E) = W_\gamma^u(x) \cap E$.

Определение 3 ^(1, 3). Марковским разбиением X относительно f называется такой набор параллелограммов $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_m\}$, что:

$X = \bigcup_{i=1}^m E_i$; $\text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset$; для любого $x \in \text{int } E_i \cap f^{-1} \text{int } E_j$ $W^s(x, E_i) \subset W^s(f(x), E_j)$, $fW^u(x, E_i) \supset W^u(f(x), E_j)$.

О п р е д е л е н и е 4 ⁽³⁾. Пусть S — матрица с элементами $s(i, j) = 0, 1$. Обозначим через Ω_S пространство последовательностей $\omega = \{\omega_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\omega_i = 1, \dots, m$, $s(\omega_i, \omega_{i+1}) = 1$, а через T — сдвиг $\omega \mapsto T\omega = \{\omega'_i = \omega_{i+1}\}$. Динамическая система (Ω_S, T) называется топологической марковской цепью (т.м.ц.) с m состояниями и матрицей допустимых переходов S .

Из существования марковского разбиения следует, что динамическая система (X, f) полусопряжена (Ω_S, T) (где $s(i, j) = 1$ при $\text{int } E_i \cap f^{-1} \text{int } E_j \neq \emptyset$ и $s(i, j) = 0$ в противном случае), т. е. существует гомоморфизм $\pi: \Omega_S \rightarrow X$ такой, что $f \circ \pi = \pi \circ T$. В ⁽⁵⁾ доказано, что $N = \max \{\text{card } \pi^{-1}(x), x \in X\} < \infty$.

Ниже показано, что всякий $A^\#$ -гомеоморфизм, допускающий марковское разбиение с числом элементов m_0 , топологически сопряжен одной из конечного числа «стандартных» динамических систем. Для стандартной системы найдена оценка числа N и показано, что для автоморфизмов сдвига на соленаидах Вильямса ⁽⁶⁾ и для Y -автоморфизмов двумерного тора полученная оценка точна.

2. Описание стандартной системы. Пусть (Ω_S, T) — т.м.ц. с m состояниями $i \in [1, m]$.

1) Определим расширение исходной т.м.ц. — новую т.м.ц. $(\Omega_{\tilde{S}}, T)$. Ее состояниями будут некоторые наборы $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, $1 \leq i_p \leq m$. Ее допустимые переходы $\tilde{i} \rightarrow \tilde{j}$ ($\tilde{s}(\tilde{i}, \tilde{j}) = 1$) связывают некоторые из пар $\tilde{i} = (i_1, \dots, i_k)$, $\tilde{j} = (j_1, \dots, j_l)$, удовлетворяющие следующим условиям: а₁) $\forall j_p \exists$ единственное i_r , такое, что $s(i_r, j_p) = 1$, т. е. определено отображение $F_1: \tilde{j} \rightarrow \tilde{i}$; б₁) F_1 сюръективно. Кроме того предполагается, что т.м.ц. (Ω_S, T) является подцепью $(\Omega_{\tilde{S}}, T)$, т. е. исходные состояния $i \in [1, m]$ входят в число состояний $(\Omega_{\tilde{S}}, T)$ и $\tilde{s}(i, i) = s(i, i)$.

2) Определим расширение т.м.ц. $(\Omega_{\tilde{S}}, T)$ — т.м.ц. $(\Omega_{\hat{S}}, T)$. Состояния $(\Omega_{\hat{S}}, T)$ имеют вид $I = \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_n\}$, где $\tilde{i}_p = (i_{p1}, \dots, i_{pt})$ — состояния т.м.ц. $(\Omega_{\tilde{S}}, T)$. Допустимые переходы $I \Rightarrow J$ связывают некоторые из пар $I = \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_n\}$, $J = \{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_m\}$, удовлетворяющие следующим условиям: а₂) $\forall \tilde{i}_k \exists$ единственное $\tilde{j}_l$, такое, что $\tilde{s}(\tilde{i}_k, \tilde{j}_l) = 1$, т. е. определено отображение $F_2: I \Rightarrow J$; б₂) F_2 сюръективно; в₂) для $i \in \tilde{i}_k$, $F_2(\tilde{i}_k) = \tilde{j}_l$ множество $F_1^{-1}(i)$ не зависит от $\tilde{i}_k$ и $\tilde{j}_l$. Так же, как и при первом расширении, предполагается, что $(\Omega_{\tilde{S}}, T)$ — подцепь $(\Omega_{\hat{S}}, T)$.

3) Введем на множестве состояний цепи $(\Omega_{\hat{S}}, T)$ отношение частично-порядка: $I = \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_n\} \ni J = \{\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_l\}$, если существует такое вложение $p: J \subset I$, что всякое $\tilde{j}_s = (j_{s1}, \dots, j_{sv})$ вкладывается в $p(\tilde{j}_s) = \tilde{i}_r = (i_{r1}, \dots, i_{rv})$. Рассмотрим индуцированное на $\Omega_{\hat{S}}$ отношение порядка: $\Delta = (\dots I_{-1} I_0 I_1 \dots) \ni \Delta' = (\dots I_{-1}' I_0' I_1' \dots) \Leftrightarrow I_n \ni I_n'$ при всех n .

Рассмотрим на $\Omega_{\hat{S}}$ бинарное отношение: $\Delta_1 * \Delta_2 \Leftrightarrow \exists \Delta_3: \Delta_1 \in \Delta_3, \Delta_2 \in \Delta_3$. Отношение $*$ вообще говоря не транзитивно. Будем рассматривать далее только те системы $(\Omega_{\hat{S}}, T)$, для которых $*$ является отношением эквивалентности. При этом в каждом классе эквивалентности $\Gamma = \{\Delta: \Delta \approx \Delta_0\}$ имеется такая последовательность $\Delta_{\max}$, что $\forall \Delta \in \Gamma \Delta \in \Delta_{\max}$.

Обозначим $(\Omega_{\hat{S}}, T, \approx)$ фактор-систему $(\Omega_{\hat{S}}, T)$ по введенному отношению эквивалентности. Очевидно, что число различных динамических систем вида $(\Omega_{\hat{S}}, T, \approx)$, построенных по всевозможным т.м.ц. с числом состояний $m \leq m_0$, конечно.

3. Теорема 1. Для всякого $A^\#$ -гомеоморфизма $f: X \rightarrow X$ динамическая система (X, f) топологически сопряжена одной из систем $(\Omega_{\hat{S}}, T, \approx)$.

Доказательство теоремы 1 следует из «геометрических» лемм 1–5. Приведем некоторые определения (см. ⁽⁵⁾). Пусть $E_i \in \mathcal{E}$, $i \in [1, m]$, —

параллелограммы марковского разбиения $\mathcal{E}$. Расширяющаяся граница $E_i - \partial^u E_i = \{x \in E_i, x \notin \text{int } W^s(x, E_i) \text{ в топологии слоя } W_v^s(x)\}$; $\partial^u \mathcal{E} = \{\partial^u E_i, i \in [1, m]\}$.

Обозначим $\text{Set } x = \{E_i, x \in E_i\}$, $J^s(x) = \{D: \forall \delta > 0 \exists z \in W_\delta^s(x) \setminus \partial^u \mathcal{E}: \text{Set } z = D\}$.

Если $J^s(x) = \{D_1, \dots, D_k\}$, $J^s(f(x)) = \{C_1, \dots, C_l\}$, то определена сюръекция $f_{*(x)}: \{D_1, \dots, D_k\} \Rightarrow \{C_1, \dots, C_l\}$. Для $D_i = (E_1, \dots, E_s)$, $C_j = (E'_1, \dots, E'_r)$, $C_j = f_{*(x)}(D_i)$ определена сюръекция $f_{(x)}^*: (E'_1, \dots, E'_r) \rightarrow (E_1, \dots, E_s)$.

Примем множества $D = \{z \in \partial^u \mathcal{E}, \text{Set } z = D\}$ за состояния т.м.ц. $(\Omega_{\mathcal{E}}, T)$, а множества $\{\bar{D}\} = \{D_1, \dots, D_k\} = \{x: J^s(x) = \{D_1, \dots, D_k\}\}$ за состояния т.м.ц. $(\Omega_{\mathcal{S}}, T)$. Отображения $f_{(x)}^*$, $f_{*(x)}$ играют для данной точки x роль F_1 и F_2 и удовлетворяют свойствам $a_1 - b_2$.

Л е м м а 1. Если $J^s(x) = J^s(y) = \{D_1, \dots, D_k\}$, то $J^s([x, y]) = \{D_1, \dots, D_k\}$.

Л е м м а 2. Если $J^s(x) = J^s(y)$, $J^s(f(x)) = J^s(f(y))$, то $f_{*(x)} = f_{*(y)}$, $f_{(x)}^* = f_{(y)}^*$.

Из леммы 2 вытекает корректность следующего определения.

О п р е д е л е н и е 5. Переход $\{\bar{D}\}_1 = \{D_{11}, \dots, D_{1k}\} \Rightarrow \{\bar{D}\}_2 = \{D_{21}, \dots, D_{2l}\}$ допустим, если $\exists x: J^s(x) = \{\bar{D}\}_1$, $J^s(f(x)) = \{\bar{D}\}_2$.

Мы определили т.м.ц. $(\Omega_{\mathcal{S}}, T)$ с состояниями $\{\bar{D}\}$ и допустимыми переходами $\Rightarrow$, являющуюся расширением $\{\Omega_{\mathcal{S}}, T\}$ в смысле 2.

З а м е ч а н и е. Другие т.м.ц. состояния которых определяются по пересечениям исходных параллелограммов, рассмотрены в (7).

Л е м м а 3. Для всякой последовательности допустимых переходов $\{\bar{D}\}_{-n_1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \{\bar{D}\}_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \{\bar{D}\}_{n_2}$ существует точка x с $J^s(f^i(x)) = \{\bar{D}\}_i$, $-n_1 \leq i \leq n_2$.

Всякой допустимой последовательности $\Delta = (\dots \{\bar{D}\}_{-n} \dots \{\bar{D}\}_0 \dots \{\bar{D}\}_n \dots)$ однозначно соответствует точка $\tilde{\pi}(\Delta) = x = \lim x_n$, где x_n — любая точка, сопоставленная в силу леммы 3 отрезку Δ от $-n$ до n . Легко видеть, что $\tilde{\pi}: \Omega_{\mathcal{S}} \rightarrow X$ осуществляет полусопряженность (X, f) с $(\Omega_{\mathcal{S}}, T)$.

Л е м м а 4. Если $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega_{\mathcal{S}}$, $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, то $\tilde{\pi}(\Delta_1) = \tilde{\pi}(\Delta_2)$.

Через Δ_x обозначим последовательность с координатами $\{\bar{D}\}_i = J^s(f^i(x))$.

Л е м м а 5. Если $x = \tilde{\pi}(\Delta)$, то $\Delta \subseteq \Delta_x$.

Последовательность Δ_x играет роль $\Delta_{\max}$ из п. 2. Леммы 4 и 5 показывают, что динамическая система (X, f) топологически сопряжена факторсистеме $(\Omega_{\mathcal{S}}, T)$ по отождествлениям вида: $\Delta_1 \approx \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_{\max}, \Delta_1 \subseteq \Delta_{\max}, \Delta_2 \subseteq \Delta_{\max}$.

Следствием теоремы 1 является

Т е о р е м а 2. Существует лишь конечное число топологических типов динамических систем $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ на локально максимальных гиперболических множествах, допускающих марковские разбиения с числом элементов, меньшим некоторого m_0 .

Из теоремы 2 и из способа построения марковского разбиения вытекает

Т е о р е м а 3. Пусть $\{f\}$ — семейство диффеоморфизмов многообразия M , $\Lambda(f)$ — локально максимальные гиперболические множества диффеоморфизмов f , которым соответствуют константы гиперболичности $c(f, \Lambda)$, $\lambda(f, \Lambda)$ и (см. определение 1) константы $\alpha_n(f, \Lambda)$. Если семейство $\{f\}$ таково, что: 1) $c(f, \Lambda(f)) < c_0$, $\lambda(f, \Lambda(f)) < \lambda_0 < 1$; 2) $0 < c_1 < \|Df\| < c_2$; 3) $\alpha_n(f, \Lambda(f)) > \alpha_0$, то число топологических типов динамических систем $f: \Lambda(f) \rightarrow \Lambda(f)$ конечно.

4. Пусть $(\Omega_{\mathcal{S}}, T, \approx)$ — динамическая система, построенная по т.м.ц. $(\Omega_{\mathcal{S}}, T)$ с m состояниями.

Оценим N из п. 1. Пусть $\omega^1 \approx \omega^2 \approx \dots \approx \omega^k$ ($\omega^i \subseteq \Delta_{\max}$, $\omega^i \neq \omega^j$). Рассмотрев в случае необходимости $T^{-L}\omega^i$ вместо ω^i , получаем, что существует такое n , что попарно различные отрезки последовательностей ω^i вида $(\omega_0^1 \dots \omega_n^1)$, $(\omega_0^2 \dots \omega_n^2)$, $\dots$ ($\omega_0^k \dots \omega_n^k$). Пусть $\Delta_{\max} = (\dots I_0 I_1 \dots I_n \dots)$, $I_0 = \{\bar{i}_0,$

$\bar{i}_{02}, \dots, \bar{i}_{0s}\}$. Разобьем k последовательностей ω^i на группы следующим образом: к l -й группе отнесем ω^i , для которых $\omega_0^i \in \bar{i}_{0l}$, $\omega_0^i \notin \bar{i}_{0p}$ при $p < l$.

Максимальное число непустых групп, которые могут быть получены таким образом, обозначим Q_1 . Пусть $Q_2 = \max \{\text{card } \bar{i}, \bar{i} - \text{состояния } \Omega_{\bar{S}}\}$.

Теорема 4. $N \leq Q_1 \cdot Q_2$.

Так как $Q_1, Q_2 \leq m$, то $N \leq m^2$.

Следствие. В обозначениях п. 1 $\text{card } \pi^{-1}(x) \leq m^2$, где m — число элементов марковского разбиения. Отметим, что оценка $\text{card } \pi^{-1}(x)$ из (5) превосходит m^{2m} .

5. 1) Пусть $f: X \rightarrow X$ автоморфизм сдвига на соленоиде Вильямса, порожденный растягивающим отображением разветвленного одномерного многообразия (см. (6)).

Существует такое $\mathcal{E} = \{E_i\}$, что E_i гомеоморфно произведению канторового множества на отрезок, $\partial \mathcal{E} = \{W^s(a, E_i), a \in A \supset f(A), \text{card } A < \infty$. В этом случае $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$, $N = 2$. Методы (8) приводят к следующему описанию отождествлений. Существуют такие $k(f)$, $l(f)$ ($l + k \leq \text{card } A + 1$) и некоторое число k -наборов $\bar{i}_{(k)}$, $\bar{j}_{(k)}$ и l -наборов $\bar{a}_{(l)}$, $\bar{b}_{(l)}$, что отождествляются пары последовательностей вида

$$(\alpha_{(\infty)}, a_1, \dots, a_l, \bar{i}_{(k)}, \bar{j}_{(k)}, \dots) \approx (\alpha_{(\infty)}, b_1, \dots, b_l, \bar{j}_{(k)}, \bar{i}_{(k)}, \dots),$$

где $(\bar{i}_{(k)}, \bar{j}_{(k)}, \dots)$, $(\bar{j}_{(k)}, \bar{i}_{(k)}, \dots)$ — периодические односторонние последовательности периода k , $\alpha_{(\infty)}$ — произвольная односторонняя допустимая последовательность.

2) Пусть $f: T^2 \rightarrow T^2$ U -автоморфизм двумерного тора, $\mathcal{E}$ — марковское разбиение Адлера, Вейса (9). В этом случае $Q_1 = Q_2 = 2$ и значит $\text{card } \pi^{-1}(x) \leq 4$. Для f с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Ω_S состоит из последовательностей с 5 символами. В точки p такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(p) = 0$, переходят

4 последовательности вида $(\dots \alpha \alpha b_{11} \dots b_{1k} x_1 \dots x_n a_{11} \dots a_{1l} ii \dots) \approx (\dots \beta \beta b_{21} \dots b_{2k} x_1 \dots x_n a_{21} \dots a_{2l} ii \dots) \approx (\dots \alpha \alpha b_{31} \dots b_{3k} x_1 \dots x_n a_{31} \dots a_{3l} jj \dots) \approx (\dots \beta \beta b_{41} \dots b_{4k} x_1 \dots x_n a_{41} \dots a_{4l} jj \dots)$. В остальные точки, лежащие на сепаратрисах нуля, переходят 2 последовательности $(x_{(\infty)} a_{11} \dots a_{1l} ii \dots) \approx (x_{(\infty)} a_{21} \dots a_{2l} jj \dots)$ или $(\dots \alpha \alpha b_{11} \dots b_{1k} y_{(\infty)}) \approx (\dots \beta \beta b_{21} \dots b_{2k} y_{(\infty)})$. Здесь $k \leq 2$, $l \leq 3$, $\bar{b}_{(k)}$, $\bar{a}_{(l)}$ — некоторые наборы, $0 \leq n$ — любое, $x_{(\infty)}$, $y_{(\infty)}$ — произвольные односторонние допустимые последовательности.

Автор выражает благодарность В. М. Алексееву за постоянное внимание и многочисленные полезные обсуждения, Д. В. Аносову и А. Б. Катку за ценные замечания.

Центральный научно-исследовательский экономический институт при Госплане РСФСР
Москва

Поступило
12 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Г. Синай, Функциональный анализ, т. 2, в. 1, 64 (1968). ² Д. В. Аносов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 90 (1967). ³ R. Bowen, Am. J. Math., v. 92, 725 (1970). ⁴ А. Б. Каток, Девятая летняя матем. школа, Киев, 1972. ⁵ R. Bowen, Am. J. Math., v. 92, 907 (1970). ⁶ R. F. Williams, Topology, v. 6, 473 (1967). ⁷ A. Manning, Bull. London Math. Soc., v. 3, Part 2, № 8, 245 (1971). ⁸ М. В. Якобсон, Матем. сб., т. 77, в. 1 (1968). ⁹ R. Adler, B. Weiss, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 57, № 6, 1573 (1967).