

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

И. А. ШИШМАРЕВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ $t \rightarrow 0$ И T -ПРОИЗВЕДЕНИИ ДЛЯ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 21 X 1975)

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t - A(x, D)u &= 0, \\ u|_{t=\tau} &= u_0(x) \end{aligned} \quad (1)$$

для системы псевдодифференциальных гипоеллиптических уравнений; $u(x, t)$ — вектор-функции с k компонентами, $x \in R^N$, $t \geq \tau$, оператор $A(x, D)$ представляет собой квадратную $(k \times k)$ -матрицу $\|a_{ij}(x, D)\|$, элементы ее $a_{ij}(x, D)$ являются псевдодифференциальными операторами* с символами $a_{ij}(x, \eta) \in S_{\rho, \delta}^m$, m, ρ, δ — вещественные числа, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ т. е. $a_{ij}(x, \eta) \in C^\infty(R^N \times R^N)$ и для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned} |a_{ij(\beta)}^{(\alpha)}(x, \eta)| &\leq C_{\alpha\beta} (1 + |\eta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (x, \eta) \in R^N \times R^N, \\ a_{ij(\beta)}^{(\alpha)}(x, \eta) &= \partial^\alpha D^\beta a_{ij}(x, \eta), \quad \partial = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Символом задачи Коши (1) назовем такую матрицу $P(x, t, \eta, \tau) = \|p_{ij}(x, t, \eta, \tau)\|$, что решение $u(x, t) \in C^\infty(R^N \times R_+^1)$ задачи Коши (1) представимо в виде

$$u(x, t) = (2\pi)^{-N} \int \exp\{i(x, \eta)\} \cdot P(x, t, \eta, \tau) \tilde{u}_0(\eta) d\eta \quad (2)$$

для любой вектор-функции $u_0(x) \in S(R^N)$, $\tilde{u}_0(\eta)$ — фурье-образ $u_0(x)$.

Обозначим через $|\cdot|$ норму в линейном пространстве $(k \times k)$ -матриц с комплексными коэффициентами.

Теорема 1. Пусть символ оператора $A(x, D)$ удовлетворяет условиям:

1) $|a_{ij(\beta)}^{(\alpha)}(x, \eta)| \leq C_{\alpha\beta} |a(x, \eta)| (1 + |\eta|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}$, $|\eta| > C_0$, — гипоеллиптичность системы;

2) $\lambda_0(x, \eta) = \max_{1 \leq j \leq k} \operatorname{Re} \lambda_{ij}(x, \eta) < 0$, $|\eta| > C_0$, $\lambda_i(x, \eta)$ — корни матрицы $\|a_{ij}(x, \eta)\|$;

3) $\frac{|a(x, \eta)|}{|\lambda_0(x, \eta)|} = O(1 + |\eta|)^{(\rho - \delta)/2k - \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — любое, $|\eta| > C_0$.

Тогда существует (и притом только один) символ $P(x, t, \eta, \tau)$ задачи Коши (1); $P(x, t, \eta, \tau) \in C^\infty(R^N \times R_+^1 \times R^N \times R_+^1)$, $t \geq \tau$.

* По поводу гипоеллиптических систем уравнений и классов $S_{\rho, \delta}^m$ см. (3).

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 при $k=1$, а при $k \geq 2$ условие 3) заменено на условие

$$4) \frac{|a(x, \eta)|}{|\lambda_0(x, \eta)|} = O(1 + |\eta|)^{(\rho - \delta)/(3k-1) - \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 - \text{любое}, \quad |\eta| > C_0.$$

Тогда для символа $P(x, t, \eta, \tau)$ задачи Коши справедлива асимптотика при $t \rightarrow \tau$

$$P(x, t, \eta, \tau) = \exp\{A(x, \eta)(t - \tau)\} + o(1), \quad (3)$$

равномерная по $(x, \eta) \in R^N \times R^N$.

З а м е ч а н и е. Если корни $\lambda_j(x, \eta)$ матрицы $\|a_{ij}(x, \eta)\|$ различны для всех $(x, \eta) \in R^N \times R^N$ и углы ($\in [0, \pi/2]$) между собственными вектор-функциями $v^1(x, \eta), \dots, v^k(x, \eta)$ при всех $(x, \eta) \in R^N \times R^N$ ограничены снизу константой $\sigma > 0$, то асимптотика (3) справедлива в условиях теоремы 1 для всех $k \geq 1$, причем условие 3) надо заменить более слабым

$$\frac{|a(x, \eta)|}{|\lambda_0(x, \eta)|} = O(1 + |\eta|)^{(\rho - \delta)/2 - \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 - \text{любое}.$$

Разобьем произвольный интервал времени $[\tau, \mathcal{T}]$, $0 \leq \tau < \mathcal{T} < \infty$ точками $t_0, t_1, \dots, t_{n+1}$ на подынтервалы $[t_i, t_{i+1}]$ длины $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $t_0 = \tau$, $t_{n+1} = \mathcal{T}$, $\Delta = \max_{0 \leq i \leq n} \Delta t_i$. Обозначим через $\exp\{[A(x^2, D^1)](t - \tau)\}$ оператор $*$, отвечающий задаче Коши (1), т. е.

$$u(x, t) = \exp\{[A(x^2, D^1)](t - \tau)\} u_0(x). \quad (4)$$

Оператор $\exp\{[A(x^2, D^1)](t - \tau)\}$ при каждом $t \geq \tau$ действует из $S(R^N)$ в $S(R^N)$, его ядро — символ $P(x, t, \eta, \tau)$.

О п р е д е л е н и е. T -произведением (хронологическим произведением) операторов $\exp\{[A(x^2, D^1)]\Delta t_i\}$ называется предел (если он существует) выражения

$$T \left(\exp \left\{ \int_{\tau}^{\mathcal{T}} [A(x^2, D^1)] ds \right\} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \exp\{[A(x^2, D^1)]\Delta t_n\} \dots \dots \exp\{[A(x^2, D^1)]\Delta t_0\} = \exp \left\{ \int_{\tau}^{\mathcal{T}} [A(x^2, D^1)] ds \right\}; \quad (5)$$

T -произведением операторов $\exp\{A(x^{2i+2}, D^{2i+1})\Delta t_i\}$ называется предел (если он существует) выражения

$$T \left(\exp \left\{ \int_{\tau}^{\mathcal{T}} A(x^2, D^1) ds \right\} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \exp\{A(x^{2n+2}, D^{2n+1})\Delta t_n\} \dots \dots \exp\{A(x^2, D^1)\Delta t_0\} = \exp \left\{ \int_{\tau}^{\mathcal{T}} A(x^{s+0}, D^{s-0}) ds \right\}. \quad (6)$$

Последние интегралы в формулах (5) и (6) называются континуально упорядоченными интегралами Фейнмана (см. (2)), обозначение $A(x^{s+0}, D^{s-0})$ показывает, что при каждом s сначала действует D , а затем x . Под сходимостью в (5) и (6) понимается простая операторная сходимость в пространстве $**$ вектор-функций с компонентами, принадлежащими $S(R^N)$. равномерная относительно τ и $\mathcal{T}$ таких, что $0 \leq \tau < \mathcal{T} \leq T$, T — любое конечное.

* Скобки [...] означают, что упорядочивание значками 1 и 2 относится только к операторам, заключенным в скобки.

** Теорема 3 имеет место и для оператора из $H_s(R^N)$ в $H_{s'}(R^N)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеет место следующее операторное равенство:

$$\exp \left\{ \int_{\tau}^{\mathcal{T}} [A(x^2, D^4)] ds \right\} = \exp \left\{ \int_{\tau}^{\mathcal{T}} A(x^{s+0}, D^{s-0}) ds \right\}. \quad (7)$$

В случае одного ($k=1$) гипозеллиптического уравнения аналогичные результаты установлены в работах (¹, ⁴).

Автор благодарен В. П. Маслову за полезное обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ В. П. Маслов, И. А. Шишмарев, УМН, т. 29, в. 4 (178) (1974). ² Р. Фейнман, Проблемы современной физики, № 3, 35 (1955). ³ Л. Хермандер, Сб. статей: Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967. ⁴ В. П. Маслов, И. А. Шишмарев, Современные проблемы математики, т. 8.