

УДК 517.946/948

МАТЕМАТИКА

С. Я. ЯКУБОВ, А. Б. АЛИЕВ

РАЗРЕШИМОСТЬ В «ЦЕЛОМ» ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 IX 1975)

В работе ⁽¹⁾ одним из авторов был выделен достаточно широкий класс нелинейных уравнений, для которых исследована как локальная, так и не-локальная разрешимость задачи Коши. В данной работе при некоторых других предположениях устанавливается глобальная разрешимость задачи Коши. Этой задаче посвящено много работ (например, ⁽¹⁻⁷⁾).

Пусть E — банахово пространство с дифференцируемой нормой и Γ — градиент квадрата нормы. Пусть A — замкнутый, обратимый оператор с областью определения $\mathcal{D}(A)$. Совокупность всех функций $u(\cdot)$, действующих из $[0, T]$ в $\mathcal{D}(A^n)$, для которых $A^k u^{(n-k)}(\cdot)$, $k=0, \dots, n$, непрерывна, обозначим через $C^n([0, T]; E(A^n), \dots, E)$.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \in \mathcal{D}(A) \quad (1)$$

в банаховом пространстве E , где $A(t)$ — замкнутый оператор с не зависящей от $t \in [0, T]$ областью определения $\mathcal{D}(A)$.

Используя результаты работы ⁽¹⁾ и априорные оценки, полученные с помощью некоторой вспомогательной функции, доказывается следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1°. При каждом $t \in [0, T]$ оператор $A(t)$ порождает сжимающую сильно непрерывную (с.н.) полугруппу; $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}(E)$, $A(t)$, с.н. дифференцируема на $\mathcal{D}(A)$.

2°. f действует из $[0, T] \times \mathcal{D}(A)$ в E , имеет E -расширенную производную Фреше f'_u ⁽¹⁾ и с.н. производную f'_t , которые удовлетворяют условию Липшица в каждом шаре $E(A)$.

3°. Для любой функции $u(\cdot) \in C^1([0, T]; E(A), E)$ имеют место неравенства

$$\operatorname{Re} \int_0^t \langle f(\tau, u(\tau)), \Gamma u(\tau) \rangle d\tau \leq c_1(\|u_0\|) \cdot \left[1 + \int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \right],$$

$$\operatorname{Re} \int_0^t \langle f'_t(\tau, u(\tau)), \Gamma u'(\tau) \rangle d\tau \leq c(r) \cdot \left[1 + \int_0^t (\|u'(\tau)\|^2 + \|A(\tau)u(\tau)\|^2) d\tau \right],$$

где $r = \max \|u(t)\|$, $0 \leq t \leq T$, $c_1(\cdot) \in C(R_1^+)$.

4°. Имеют место следующие оценки:

$$\operatorname{Re} \langle f'_u(t, u)v, \Gamma v \rangle \leq c_2(\|u\|) \cdot \|v\|^2, \quad \|f(t, u)\| \leq c_2(\|u\|) + \alpha \cdot \|A(t)u\|,$$

где $c_2(\cdot) \in C(R_1^+)$, $0 \leq \alpha < 1$.

Тогда существует решение, притом единственное, задачи (1) из $C^1([0, T]; E(A), E)$ и для любых начальных данных $u_0, v_0 \in \mathcal{D}(A)$ для раз-

ности соответствующих решений $u(t)$, $v(t)$ имеет место следующая оценка:

$$\|A(t)(u(t) - v(t))\| + \|u'(t) - v'(t)\| \leq \\ \leq c(T, \|A(0)u_0\|, \|A(0)v_0\| \cdot \|A(0)(u_0 - v_0)\|,$$

где $c(\cdot) \in C(R_3^+)$.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения второго порядка

$$u''(t) + A(t)u'(t) + B(t)u(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (2)$$

в гильбертовом пространстве H .

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

5°. $B(t) = B^*(t) \geq c^2 I$, $\mathcal{D}(B(t)) = \mathcal{D}(B)$; $B(t)$ дважды с.н. дифференцируема на $\mathcal{D}(B)$.

6°. $\operatorname{Re} \langle A(t)u, u \rangle \geq \omega \cdot \|u\|^2$, $u \in \mathcal{D}(A(t))$, где $\mathcal{D}(A(t)) \supset \mathcal{D}(B^{1/2})$; $A(t)$ с.н. дифференцируема на $\mathcal{D}(B^{1/2})$.

7°. f действует из $[0, T] \times H(B) \times H(B^{1/2})$ в H , имеет непрерывную производную f'_t , с.н. $H(B^{1/2})$ -расширенную производную Фреше f'_u , с.н. H -расширенную производную Фреше f'_w , удовлетворяющие условию Липшица в каждом шаре пространства $H(B) \times H(B^{1/2})$.

8°. $f = f_1 + f_2$. Для любой функции $u(\cdot) \in C^2([0, T]; H(B), H(B^{1/2}), H)$ имеют место неравенства

$$\operatorname{Re} \int_0^t \langle f_1(\tau, u(\tau), u'(\tau)), u'(\tau) \rangle d\tau \leq c_3 (\|B^{1/2}(0)u_0\|, \|u_1\|) \cdot \\ \cdot \left[1 + \int_0^t (\|B^{1/2}(\tau)u(\tau)\|^2 + \|u'(\tau)\|^2) d\tau \right] - g(\|u(t)\|_{E_1}, \|u'(t)\|_{E_2}) + \\ + \delta \cdot (\|B^{1/2}(t)u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2), \\ \operatorname{Re} \int_0^t \langle f'_t(\tau, u(\tau), u'(\tau)) + f'_u(\tau, u(\tau), u'(\tau))u'(\tau), u''(\tau) \rangle d\tau \leq \\ \leq c_4(\tau) \cdot \left[1 + \int_0^t (\|B(\tau)u(\tau)\|^2 + \|B^{1/2}(\tau)u'(\tau)\|^2 + \|u''(\tau)\|^2) d\tau \right],$$

где $0 \leq \delta < 1$, $E_1 \supset H(B)$, $E_2 \supset H(B^{1/2})$ — некоторые банаховы пространства: $g(\cdot) \in C(R_2^+)$, $g(\eta, \xi) \geq c(1 + \eta^{e_1} + \xi^{e_2})$, $e_i > 0$ ($i=1, 2$), $c_3(\cdot) \in C(R_2^+)$,

$$c_4(\cdot) \in C(R_3^+), \quad r \in R_3^+, \quad r_1 = \max (\|B^{1/2}(t)u(t)\| + \|u'(t)\|), \\ r_2 = \max \|u(t)\|_{E_1}, \quad r_3 = \max \|u'(t)\|_{E_2}.$$

9°. Имеют место следующие оценки:

$$\|f_2(t, u, w)\| \leq c \cdot [1 + \|B^{1/2}(t)u\| + \|w\| + \frac{1}{2}(\|u\|_{E_1}, \|w\|_{E_2})], \\ \operatorname{Re} \langle f'_w(t, u, w)v, v \rangle \leq c_5 (\|B^{1/2}(0)u\|, \|w\|, \|u\|_{E_1}, \|w\|_{E_2}) \cdot \|v\|^2, \\ \|f_1(t, u, w)\| \leq c_5 (\|B^{1/2}(0)u\|, \|w\|, \|u\|_{E_1}, \|w\|_{E_2}) \cdot (1 + \|B^{1/2}(t)w\|) + \beta \cdot \|B(t)u\|,$$

где $0 \leq \beta < 1$, $c_5(\cdot) \in C(R_4^+)$, $u \in \mathcal{D}(B)$, $w \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, $v \in H$.

10°. $u_0 \in \mathcal{D}(B)$, $u_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$.

Тогда существует решение, притом единственное, задачи (2) из $C^2([0, T]; H(B), H(B^{1/2}), H)$ и для любых начальных данных $u_0, v_0 \in \mathcal{D}(B)$, $u_1, v_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ для разности соответствующих решений $u(t)$, $v(t)$ имеет

место следующая оценка:

$$\|B(t)(u(t)-v(t))\|+\|B^{1/2}(t)(u'(t)-v'(t))\|+\|u''(t)-v''(t)\|\leqslant \\ \leqslant c(T, r) \cdot [\|B(0)(u_0-v_0)\|+\|B^{1/2}(0)(u_1-v_1)\|],$$

где $r \in R_1^+$, $r_1 = \|B(0)u_0\|$, $r_2 = \|B(0)v_0\|$, $r_3 = \|B^{1/2}(0)u_1\|$, $r_4 = \|B^{1/2}(0)v_1\|$.

Теоремы 1 и 2 имеют многочисленные приложения. Мы приведем одно из них.

Пусть Ω — открытое связное множество R_n с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим квазилинейное гиперболическое уравнение в частных производных

$$D_t^2 u(t, x) + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(t, x) D^\alpha D_t u(t, x) + \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} b_\alpha(t, x) D^\alpha u(t, x) + \\ + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha(t, x) D^\alpha u(t, x) = \sigma_1(t) \Phi'(|u(t, x)|^2) u(t, x) + \\ + \sigma_2(t) \Psi(|D_t u(t, x)|) D_t u(t, x) + \\ + G(t, x, u(t, x), Du(t, x), \dots, D^3 u(t, x), D_t u(t, x)) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\mathcal{D}_j(x, D) u(t, x)|_{\partial\Omega} = \sum_{|\alpha| \leqslant k_j} d_{\alpha j}(x) D^\alpha u(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad k_j \leqslant 2m-1, \quad j=1, \dots, m, \quad (4)$$

и с начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad D_t u(0, x) = u_1(x), \quad (5)$$

где $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$, $i=1, \dots, n$, $D_t = \partial/\partial t$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) $b_\alpha(t, x) \in C^{2, \alpha}([0, T] \times \bar{\Omega})$, $|\alpha| \leqslant 2m$; задача $(B(t, x, D), \{\mathcal{D}_j\}_1^m)$ формально самосопряжена, где $B(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} b_\alpha(t, x) D^\alpha$;

$$(-1)^m \sum_{|\alpha| = 2m} b_\alpha(t, x) \xi^\alpha \geqslant \beta_0 |\xi|^\alpha, \quad \beta_0 > 0, \quad \xi \in R_n \setminus \{0\}, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T].$$

2) Система граничных операторов $\{\mathcal{D}_j\}_1^m$ образует нормальную на $\partial\Omega$ систему и усиленно покрывает оператор $B(t, x, D)$ на $\partial\Omega$ ⁽⁸⁾

3) $a_\alpha(t, x) \in C^{1, 0}([0, T] \times \bar{\Omega})$, $|\alpha| \leqslant m$ и оператор $A(t)$, определяемый в $L^2(\Omega)$ равенствами $\mathcal{D}(A) = W_2^m(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^m)^*$, где $k_r' m - 1$, $k_{r+1} \geqslant m$, $A(t)u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(t, x) D^\alpha u(x)$, удовлетворяет условию диссипативности.

$$4) c_\alpha(t, x) \in C^{1, 0}([0, T] \times \bar{\Omega}), \quad |\alpha| \leqslant m.$$

$$5) u_0(x) \in W_2^{2m}(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^m), u_1(x) \in W_2^m(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^m).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–5). Далее, пусть 6) $n < 2m$, $|\beta| < (2m-n)/2$; функция $G(t, x, z, \eta, \xi)$ непрерывна вместе со своими производными по t, z, η, ξ в области $\{t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}, z \in \mathbb{C}, \eta \in \mathbb{C}^N, \xi \in \mathbb{C}\}$, причем эти производные удовлетворяют локальному условию Липшица: $\sigma_i(\cdot) \in C^1[0, T]$, $i=1, 2$, $\Phi(\cdot) \in C^2(R_1^+)$, $\Psi(\cdot) \in C^1(R_1^+)$ причем $\Phi''(\cdot)$ и $\Psi'(\cdot)$ удовлетворяют локальному условию Липшица;

$$\sigma_1(t) \Phi(r) \leqslant -c(1+r^\alpha), \quad \sigma_1'(t) \Phi(r) \geqslant -c(1+r),$$

$$\Psi(r) \leqslant c, \quad \Psi'(r) \leqslant 0, \quad |\Psi(r)| \leqslant c(1+r^0),$$

* $W_2^l(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^s) = \{f \in W_2^l(\Omega), \mathcal{D}_j f|_{\partial\Omega} = 0, j=1, \dots, s\}$, где $k_s < l$.

где $\rho \leq 2m/n$, $\alpha \geq 1/2$,

$$|G_t'(t, x, z, \eta, \xi)| \leq c(1 + |z|^\alpha + |\eta| + |\xi|), \quad |G_z'(t, x, z, \eta, \xi)| \leq c(z, \eta) \cdot (1 + |\xi|),$$

$$|G_\eta'(t, x, z, \eta, \xi)| \leq c(z, \eta) \cdot (1 + |\xi|), \quad |G_\xi'(t, x, z, \eta, \xi)| \leq c(z, \eta),$$

где $c(\cdot) \in C(C^{N+1}, R_1^+)$.

Тогда существует решение, притом единственное, задачи (3)–(5) из $C^2([0, T]; W_2^{2m}(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^m), W_2^m(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^r), L^{2r}(\Omega))$ и для любых начальных данных $u_0(x)$, $v_0(x) \in W_2^{2m}(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^m)$, $u_1(x)$, $v_1(x) \in W_2^m(\Omega, \{\mathcal{D}_j\}_1^r)$ для разности соответствующих решений $u(t, x)$, $v(t, x)$ имеет место оценка

$$\|u(t, x) - v(t, x)\|_{W_2^{2m}(\Omega)} + \|D_t(u(t, x) - v(t, x))\|_{W_2^m(\Omega)} + \|D_t^2(u(t, x) - v(t, x))\|_{L^2(\Omega)} \leq c(T, r) \cdot [\|u_0(x) - v_0(x)\|_{W_2^{2m}(\Omega)} + \|u_1(x)\|_{W_2^m(\Omega)}],$$

где $r \in R_4^+$, $r_1 = \|u_0(x)\|_{W_2^{2m}(\Omega)}$, $r_2 = \|v_0(x)\|_{W_2^{2m}(\Omega)}$, $r_3 = \|u_1(x)\|_{W_2^m(\Omega)}$, $r_4 = \|v_1(x)\|_{W_2^m(\Omega)}$ и $c(\cdot) \in C(R_5^+)$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
3 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Я. Якубов, Тр. московск. матем. общ., т. 23 (1970).
- ² А. В. Жиббер, А. Б. Шабат, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 1 (1970).
- ³ J. Segal, Ann. Math., v. 78, № 2 (1963).
- ⁴ С. Я. Якубов, Функц. анализ и его приложения, т. 4, № 3 (1970).
- ⁵ С. Я. Якубов, У. Исмаилова, Изв. АзербССР, сер. физ.-тех. матем. наук, № 6 (1974).
- ⁶ С. И. Похожаев, Тр. московск. математ. общ., т. 23 (1970).
- ⁷ Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.
- ⁸ Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971.