

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, А. Х. АМИРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВНОЙ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА

1. В последнее время теория эволюционных уравнений привлекает внимание многих математиков (см. ^(1, 2)).

В настоящей работе исследуется условная корректность задачи Коши для одного уравнения эволюционного типа.

По поводу понятий классической и условной корректности см. ⁽³⁾. Пусть U — гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций $u(x, y)$, определенных в полосе $\{-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$, V (V_m) — множество сильно непрерывных (m раз сильно непрерывно дифференцируемых) функций $v(t)$ скалярного аргумента $t \in [0, T]$ со значениями в U .

Рассмотрим уравнения

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} = Av(t) + f(t), \quad f(t) = f(x, y, t); \quad v(t) \in V_m, \quad \forall t \quad v(t) \in D(A), \quad (1)$$

где оператор A определяется следующим образом:

$$Au(x, y) = a \frac{\partial^p}{\partial x^p} \int_0^y \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_{s-1}} u(x, y_s) dy_1 \dots dy_{s-1} dy_s,$$

a — заданное вещественное число,

$$D(A) = \left\{ u \in U \mid \exists \frac{\partial^p u(x, y)}{\partial x^p} \in U \right\}.$$

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0} = v_k \in D(A), \quad k=0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (2)$$

Исследование условной корректности задачи Коши для однородного уравнения (1) впервые проведено в работе ⁽⁴⁾ при $m=1$ в случае, когда A — нормальный оператор. Ранее задача (1), (2) при $m=s=1$, $p=2$ исследовалась в ⁽⁵⁾.

Имеет место

Предложение. Пусть выполняется одно из следующих условий:

- 1) $p=4k+2$, $a < 0$; $k=0, 1, 2, \dots$;
- 2) $p=4k$, $a > 0$; $k=1, 2, 3, \dots$;
- 3) $m=s=1$, $p=2k+1$; $k=0, 1, 2, \dots$;
- 4) $m=s=1$, $p=4k+2$, $a > 0$; $k=0, 1, 2, \dots$;
- 5) $m=s=1$, $p=4k$, $a < 0$; $k=1, 2, 3, \dots$.

Тогда в случаях 1)–3) задача (1), (2) классически некорректна. В случаях 4), 5) задача (1), (2) классически корректна.

В других случаях авторам исследовать корректность задачи (1), (2) не удалось.

2. Исследуем теперь задачу (1), (2) на условную корректность. Введем обозначения:

$$\hat{v}_0 = \{v_k\}_0^{m-1}; \quad \|\hat{v}_0\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|^2,$$

$$\mathfrak{M}_{C,T}^p = \left\{ u \in U \mid \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \exp(2|\lambda|^p T) \cdot |\bar{u}(\lambda, y)|^2 d\lambda dy \leq C^2; \right.$$

$$\left. \bar{u}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\lambda x} dx \right\},$$

$$\mathfrak{M}_{C,T}^p = \left\{ f(t) \in V \mid \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_0^T \exp(2|\lambda|^p T) \cdot |\bar{f}(\lambda, y, t)|^2 d\lambda dy dt \leq C_1^2; \right.$$

$$\left. \bar{f}(\lambda, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) e^{-i\lambda x} dx \right\},$$

M — множество решений $v(t)$ однородного уравнения (1) с начальными данными $\hat{v}_0 \in \mathfrak{M}_{C,T}^p$. Легко доказать, что такое решение существует и притом единственно для любого $\hat{v}_0 \in \mathfrak{M}_{C,T}^p$.

Определим $\{B_\alpha\}$ — семейство линейных операторов — следующим образом:

$$B_\alpha \hat{v}_0 = \int_{-1/\alpha}^{1/\alpha} \{ \exp[tA(\lambda)] \cdot \hat{v}_0(\lambda, y) \}_1 \cdot \exp(i\lambda x) d\lambda, \quad \alpha \in (0, 1],$$

где

$$A(\lambda) = \|a_{i,j}\|_1^m, \quad a_{j,j+1} = E, \quad j=1, \dots, m-1,$$

E — единичный оператор в U ,

$$a_{m1} u = (-i\lambda)^p \int_0^y \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_{s-1}} u(\lambda, y_s) dy_1 \dots dy_{s-1} dy_s,$$

остальные $a_{i,j} = 0$; 0 — нулевой оператор в U ;

$$\hat{v}_0(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_0(x, y) \exp(-i\lambda x) dx,$$

последний интеграл понимается в смысле главного значения;

$$\exp[tA(\lambda)] = \sum_0^{\infty} \frac{t^k A^k(\lambda)}{k!},$$

$\{\exp[tA(\lambda)] \hat{v}_0(\lambda, y)\}$, есть первая компонента вектора $\{\exp[tA(\lambda)] \hat{v}_0(\lambda, y)\}$.

В этих обозначениях имеют место теоремы.

Теорема 1. Для $\forall v(t) \in M$ справедлива оценка устойчивости

$$\|v(t)\| \leq \alpha(m) \|\hat{v}_0\|^{1-t/T} C^{t/T},$$

где $\alpha(m) > 0$ зависит только от m .

Теорема 2. Пусть $\hat{v}_0 \in \mathfrak{M}_{C,T}^p$, $f(t) \in \mathfrak{M}_{C_1,T}$; тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $v(t)$, для которого выполняется неравенство

$$\|v(t)\| \leq \alpha(m) \|\hat{v}_0\|^{1-1/T} C^{1/T} + (mT)^{1/2} \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2(1-1/T)} C_1^{1/T}.$$

Теорема 3. Семейство линейных операторов $\{B_\alpha\}$ является регуляризирующим семейством относительно задачи (1), (2), и справедлива следующая оценка эффективности данного регуляризирующего семейства:

$$\|B_\alpha \hat{v}_\varepsilon - v(t)\| \leq \exp[(1/\alpha)^p t] \cdot \varepsilon + \exp[-(1/\alpha)^p (T-t)] \cdot C,$$

где v_ε — приближенные начальные данные и $\|\hat{v}_0 - \hat{v}_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

По поводу определения регуляризирующего семейства и оценки эффективности см. (3, 6).

3. Рассмотрим вопрос о возмущении уравнения (1). Пусть $v(t) = u(x, y, t)$ — решение уравнения

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} = (A+B)v(t) + f(t), \quad (1a)$$

где оператор B имеет вид

$$Bu(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Сформулируем теорему о задаче Коши (2) для уравнения (1a).

Теорема 4. Пусть функция $K(\lambda, y, \xi, \eta)$ — преобразование Фурье от функции $K(x, y, \xi, \eta)$ по переменной x — удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \exp(2|\lambda|^p T) \cdot |K(\lambda, y, \xi, \eta)|^2 d\lambda dy d\xi d\eta < \frac{1}{T}.$$

Тогда решение задачи (2) для уравнения (1a) единственно.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. ² С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. ³ М. М. Лаврентьев, Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1973. ⁴ С. Г. Крейн, ДАН, т. 114, № 6, 1162 (1957). ⁵ М. М. Лаврентьев, В кн. Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики, Новосибирск, 1975. ⁶ А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, М., 1974.