

Б. А. ДУБРОВИН, И. М. КРИЧЕВЕР,
член-корреспондент АН СССР С. П. НОВИКОВ

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ И РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

1°. Рассмотрим двумерное уравнение Шредингера $\hat{H}\psi = E\psi$ или $\hat{H}\psi = -i\partial\psi/\partial t$, где $\hat{H} = (i\partial/\partial x - A_1)^2 + (i\partial/\partial y - A_2)^2 + u(x, y)$, причем потенциал $u(x, y)$ и вектор-потенциал (A_1, A_2) периодичны по (x, y) с периодами T_1, T_2 . В нестационарном случае u, A_1, A_2 зависят также от времени. Магнитное поле $H(x, y) = \partial A_1/\partial y - \partial A_2/\partial x$ направлено по оси z и имеет нулевой поток $\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} H(x, y) dx dy = 0$. Наша цель — найти возможно более широ-

кий класс «интегрируемых» случаев прямой и обратной задач, где собственная функция ψ и коэффициенты оператора $\hat{H}$ одновременно могут быть найдены точно. В одномерной задаче, где $\hat{H} = -d^2/dx^2 + u(x)$, интегрируемый класс «конечнозонных» потенциалов был открыт и изучен в связи с теорией уравнения Кортевега — де Фриза (К.—дФ.) (см. обзор (2)). В одномерной нестационарной задаче $\hat{H}\psi - i\partial\psi/\partial t = 0$ интегрируемый класс потенциалов $u(x, t)$ найден в (3). Данная работа стимулирована, с одной стороны, методом работы (3) и, с другой стороны, — аналогами вышних уравнений К.—дФ., открытыми Манаковым (4) и сохраняющими уравнение $\hat{H}\psi = E_0\psi$ с магнитным полем при одном уровне E_0 .

2°. В двумерной стационарной задаче $\hat{H}\psi = E\psi$ естественно выделяются блоховские собственные функции $\psi(x, y, p_1, p_2)$, где $\psi(x+T_1, y) = e^{ip_1 T_1} \psi(x, y)$ и $\psi(x, y+T_2) = e^{ip_2 T_2} \psi(x, y)$. Пусть также $\psi(0, 0, p_1, p_2) = 1$. Числа p_1, p_2 называются квазиимпульсами. При заданных вещественных p_1, p_2 определен дискретный спектр энергий $\mathcal{E}_n(p_1, p_2)$. Очевидно, $\psi = \psi(x, y, p_1, p_2, n)$.

Определение 1. Мы скажем, что гамильтониан $\hat{H}$ обладает хорошими аналитическими свойствами, если: а) все ветви $\mathcal{E}_n(p_1, p_2)$ продолжаются на все комплексные значения квазиимпульсов; в) блоховская функция $\psi(x, y, p_1, p_2, n)$ существует при всех комплексных (p_1, p_2) как мероморфная функция от (p_1, p_2) на всех листах n ; в) полный график всех многозначных комплексных функций $\mathcal{E}_n(p_1, p_2)$ образует комплексное многообразие $\hat{M}^2$, на котором действует группа сдвигов $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $p_1 \rightarrow p_1 + 2\pi n/T_1$, $p_2 \rightarrow p_2 + 2\pi m/T_2$. Фактор-многообразие $M^2 = \hat{M}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ мы назовем многообразием квазиимпульсов. Для точек $P \in M^2$ определена блоховская функция $\psi = \psi(x, y, P)$. Определена также функция $\mathcal{E}: M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (закон дисперсии), где $\hat{H}\psi = \mathcal{E}(P)\psi$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость энергии.

Определение 2. Гамильтониан $\hat{H}$ с хорошими аналитическими свойствами мы назовем алгебраическим, если существует компактное комплексное многообразие W и его мероморфное отображение $\mathcal{E}: W \rightarrow \mathbb{P}^1 = (\mathbb{C} \cup \infty)$ в расширенную плоскость энергии, на котором открытая (всюду плотная) область изоморфна многообразию квазиимпульсов M^2 с законом дисперсии $\mathcal{E}: M^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Дополнение $W \setminus M^2 = X_\infty$ мы назовем бесконечно удаленной частью. Мы требуем, чтобы X_∞ была объединением конечного числа римановых поверхностей (алгебраических кривых). Служи отображения $\mathcal{E}: M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ после перехода к пополнению $W^g \rightarrow$

$\rightarrow (CU\infty)$ имеют вид $\mathcal{E}^{-1}(E_0) \subset W$; они являются компактными римановыми поверхностями $X = \mathcal{E}^{-1}(E_0)$. Для всех $E_0 \neq \infty$ пересечение $X \cap X_\infty$ состоит из конечного числа точек. Блоховская функция $\psi(x, y, P)$ имеет существенную особенность в бесконечно удаленных точках $P \in X_\infty$.

Перечислим свойства алгебраических гамильтонианов.

1. Для алгебраического гамильтониана $\hat{H}$ на слое $X = \mathcal{E}^{-1}(E_0)$, $E_0 \neq \infty$, найдется ровно две бесконечно удаленные точки $P_1 \cup P_2 = X \cap X_\infty$; если w_1, w_2 — локальные параметры около точек P_1, P_2 на X , то для блоховской функции имеется асимптотика

$$\psi \sim e^{h_1(x+iy)} [c_1(x, y) + c_1(x, y)^{u(x, y)/k_1 + O(1/k_1^2)}],$$

$$\psi \sim e^{h_2(x-iy)} [c_2(x, y) + c_2(x, y)^{v(x, y)/k_2 + O(1/k_2^2)}],$$

где $k_1 = 1/w_1, k_2 = 1/w_2, k_1 \rightarrow \infty, k_2 \rightarrow \infty$.

2. Дивизор полюсов D функции ψ на $X = \mathcal{E}^{-1}(E_0)$ имеет степень $n(D) = g$, где g — род кривой X , если X — общий слой отображения $\mathcal{E}$, $D = D_1 + \dots + D_g$. Дивизор D не зависит от x, y .

Вообще говоря, мы вводим более общий класс комплексных квазипериодических слабо алгебраических гамильтонианов $\hat{H}$. Требуется, чтобы существовала «блоховская» собственная функция $\psi(x, y, P)$ такая, что: а) дифференциал $d\psi/\psi = (\psi_x dx + \psi_y dy)/\psi$ является квазипериодическим с той же группой периодов, что и $\hat{H}$; б) ψ мероморфна на некотором комплексном многообразии M^2 , как и в определении 1, $\hat{H}\psi = \mathcal{E}(P)\psi$, $\mathcal{E}: M^2 \rightarrow C$; в) один уровень энергии $\mathcal{E} = E_0$ в многообразии M^2 пополняется до комплексной алгебраической кривой X ; г) верны свойства 1 и 2 (см. выше).

3°. Перейдем теперь к решению обратной задачи. Имеет место

Лемма 1. Если на произвольной римановой поверхности X рода g задана пара точек P_1, P_2 и дивизор $D = D_1 + \dots + D_g$, то найдется функция $\psi(x, y, P)$ с дивизором полюсов D и асимптотиками, указанными в свойстве 1. Эта функция определена однозначно с точностью до общего множителя $c_1(x, y) \rightarrow c_1(x, y)f(x, y), c_2 \rightarrow c_2f$.

Построение этой функции проводится по схеме (1), уже неоднократно использованной в работах авторов, Матвеева и Итса (см. обзор (2) и работу (3)).

Лемма 2. Функция $\psi(x, y, P)$, построенная в лемме 1, удовлетворяет уравнению $\hat{H}\psi = 0$, где

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\partial^2/\partial z \partial \bar{z} + A_z \partial/\partial \bar{z} + v(x, y) = \\ &= (i \partial/\partial x - A_1)^2 + (i \partial/\partial y - A_2)^2 + u(x, y), \end{aligned}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = c(x, y),$$

$$A_1 + iA_2 = A_z = \partial \ln c(x, y)/\partial z, \quad A_z = A_1 - iA_2 = 0,$$

$$v(x, y) = -2\partial\mu/\partial \bar{z}.$$

Функции $A_1, A_2, u(x, y)$ и дифференциал $d \ln \psi = (\psi_x dx + \psi_y dy)/\psi$ являются почти периодическими с общей группой периодов, зависящей лишь от кривой X и пары точек $P_1, P_2 \in X$.

Для любой антиинволюции $T: X \rightarrow X$ в группе $H_1(X)$ имеется базис циклов $a_i, b_i \in H_1(X)$ такой, что $a_i \cdot b_i = \delta_{ij}$, $T \cdot a_i = a_i$, $T \cdot b_j = -b_j$. Выберем базис дифференциалов 1-го рода $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ такой, что $\oint_{a_i} \omega_j = 2\pi i \delta_{ij}$. Матри-

ца $B_{kj} = \oint \omega_j$ вещественна, и $T^*(\omega_k) = -\bar{\omega}_k$. Выберем два дифференциала Ω_α 2-го рода, имеющие вид $\Omega_\alpha \sim (dw_\alpha/w_\alpha^2 + \text{регулярный})$ около точек P_α и $\oint_{a_k} \Omega_\alpha = 0$. Пусть $U_{j\alpha} = \oint_{b_j} \Omega_\alpha$. Если $T(P_1) = P_2$, то верно одно из соотношений

$U_{j1} = \pm U_{j2}$, если $T_{w_1}^* = \pm \bar{w}_2$. Пусть $D(x, y) = \sum_{j=1}^g D_j(x, y)$ — дивизор нулей

функции $\psi(x, y, P)$. По схеме (1) во всех случаях получаем

$$(zU_{k1} + \bar{z}U_{k2}) = \sum_{j=1}^g \int_{D_j}^{D_j(x,y)} \omega_k, \quad z = x + iy,$$

(с точностью до решетки в C^n). Пусть антиинволюция T имеет не менее g вещественных (неподвижных) овалов, не зависящих в $H_1(X)$. Эти овалы дадут полубазис циклов $a_1, \dots, a_g$. Возьмем дивизор полюсов вида $D = \sum_{j=1}^g D_j$, где точка D_j лежит на овале a_j . Пусть $T(P_1) = P_2$ и $T^*(w_1) = \bar{w}_2$.

Лемма 3. Если точки P_1, P_2 лежат вне овалов $(a_1, \dots, a_g)$, а полюсы D_j — на различных овалах a_j , то функции iA_1, iA_2 , и получатся гладкими и вещественными.

Это дает достаточное (но не необходимое) условие ограниченности коэффициентов $iA_1, iA_2, u(x, y)$.

Пусть $\theta(\eta_1, \dots, \eta_n)$ — θ -функция Римана, построенная по матрице $B_{kj} = \oint_{b_j} \omega_k$. Из лемм вытекает

Теорема 1. Пусть асимптотика функции $\psi(x, y, P)$ около произвольных точек P_1 и P_2 на X имеет вид $\psi \sim e^{k_1 z} (1 + \mu(x, y)/k_1 + \dots)$ и $\psi \sim c(x, y)^{k_2 z} (1 + v(x, y)/k_2 + \dots)$, где $w_1 = 1/k_1, w_2 = 1/k_2$ — локальные параметры на X около точек P_1 и P_2 .

Тогда коэффициенты оператора $\hat{H}$ имеют вид

$$u(x, y) = -2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln \theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{W}(D)),$$

$$A_{\bar{z}} = A_1 + iA_2 = \frac{\partial}{\partial z} \ln \left[\frac{\theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{V}_1 + \vec{W}(D))}{\theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{V}_2 + \vec{W}(D))} \right],$$

$A_z = A_1 - iA_2 = 0, D = D_1 + \dots + D_g$ — дивизор полюсов,

$$W_j(D) = \sum_k \int_Q^{D_k} \omega_j + \frac{1}{2} B_{j\bar{j}} + \sum_{s \neq j} \oint_{a_j}^t \left(\int_Q^t \omega_s \right) \omega_j(t), \quad t \in a_j, \quad V_{\alpha j} = \int_Q^{P_{\alpha}} \omega_j;$$

Q — фиксированная точка. Функция $\psi(x, y, P)$ удовлетворяет уравнению $\hat{H}\psi = E_0\psi$ и задается формулой

$$\psi(x, y, P) = \exp \left\{ z \int_Q^P \Omega_1 + \bar{z} \int_Q^P \Omega_2 \right\} \frac{\theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{W}(D) + \vec{f}(P)) \theta(\vec{W}(D))}{\theta(\vec{f}(P) + \vec{W}(D)) \theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{W}(D))},$$

где $\vec{f}(P) = (f_j(P)), f_j(P) = \int_Q^P \omega_j$.

Магнитное поле направлено по третьей оси и имеет вид

$$H(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{\theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{W}(D) + \vec{V}_1)}{\theta(\vec{U}_1 z + \vec{U}_2 \bar{z} + \vec{W}(D) + \vec{V}_2)}.$$

4°. Коэффициенты линейных операторов $\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial \ln c}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - u_{\bar{z}}$

найденные в этой работе по кривой X , паре точек P_1, P_2 и дивизору D , удовлетворяют некоторым нелинейным уравнениям. Любая алгебраическая функция f на X с полюсами лишь в точках P_1, P_2 порядков m_1 и m_2 по схеме (3) порождает оператор $\hat{H}_f$ такой, что $\hat{H}_f \psi = f \psi$, где

$$\hat{H}_f = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{m_1} + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{m_2} + \sum_{i=1}^{m_1} a_i(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{m_1-i} + \sum_{j=1}^{m_2} b_j(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{m_2-j}.$$

Имеют место соотношения

$$[\hat{H}_f, \hat{H}] = D_{(f)} \hat{H}, \quad [\hat{H}_g, \hat{H}] = D_{(g)} \hat{H},$$

где $D_f, D_{(f, g)}$ — дифференциальные операторы, f и g — функции на X с полюсами только в точках P_1, P_2 . Эти соотношения эквивалентны уравнениям на коэффициенты $c(x, y), u(x, y)$.

Рассмотрим пример, возникший в процессе обсуждения авторов с А. Р. Итсом взаимоотношения результатов данной работы и уравнения Sin — Gordon. Пусть две функции f, g на X имеют полюса второго порядка лишь в точках P_1, P_2 соответственно, $k^2 \sim f, k'^2 \sim g$. Тогда

$$\hat{H}_f = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \hat{H}_g = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - 2 \frac{\partial \ln c}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Из соотношений $[\hat{H}_f, \hat{H}] = D_{(f)} \hat{H}, [\hat{H}_g, \hat{H}] = D_{(g)} \hat{H}, [\hat{H}_f, \hat{H}_g] = D_{(f, g)} \hat{H}$ получаем набор нелинейных уравнений

$$v_{zz} - v(c_{zz}/c) = 0, \quad 2u_{zz} = (c_{zz}/c)_{\bar{z}\bar{z}},$$

$$v_{\bar{z}\bar{z}} - v(c_{\bar{z}\bar{z}}/c) = 0, \quad 2u_{\bar{z}\bar{z}} = (c_{\bar{z}\bar{z}}/c)_{z\bar{z}}, \quad v = u/c.$$

Нетривиальные решения этих уравнений получаются из условий совместности $\alpha_{z\bar{z}} = \varphi(\alpha)$, где $\alpha = \ln c$, $\varphi(\alpha) = ae^{2\alpha} + be^{-2\alpha}$, $u = \kappa c^2 = \kappa e^{2\alpha}$, $\kappa = \text{const} = 2a, b = \text{const}$.

Для уравнения Лиувилля $\Delta \alpha = e^{-2\alpha}$ имеем $u = 0$. Соотношение $u = \kappa c^2$ не очевидно из формул теоремы 1. После замены $z \rightarrow x' + t = \xi, \bar{z} \rightarrow x' - t = \eta$ получим

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - u.$$

Уравнение $\hat{H}\psi = 0$ примет вид

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = i \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} + c_1 \psi_2, \quad \psi = \psi_1,$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -i \frac{\partial \psi_2}{\partial x'} + c_2 \psi_1, \quad \psi_2 = \frac{i}{c_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}, \quad u = -c_1 c_2, \quad \alpha = -\ln c_1.$$

В случае $u = \kappa c^2$ будем иметь $c_1 = -c, c_2 = \kappa c$ (обратная задача для этого уравнения, если c_1 и c_2 убывают при $|x| \rightarrow \infty$, впервые рассматривалась в (5)).

Отметим, наконец, что, рассматривая асимптотики для ψ вида $(\psi \sim e^{kx + ik^2 t}, \psi \sim ce^{k'y + ik^2 t})$, мы получим аналогичным путем решения уравнения

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \Delta - a(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} - u \right) \psi = 0.$$

Методы этой работы обобщаются на размерности $n > 2$, причем всегда спектральные данные, однозначно определяющие оператор $\hat{H}$, должны задаваться на одной римановой поверхности X .

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
19 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. И. Ахиезер, ДАН, т. 141, № 2, 263 (1961). ² Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, УМН, т. 31, № 1, 92 (1976). ³ И. М. Кричвер, ДАН, т. 227, № 2 (1976). ⁴ С. В. Манаков, УМН, т. 31, № 6, 237 (1976). ⁵ Л. П. Нижник, Обратная нестационарная задача рассеяния, Киев, «Наукова думка», 1973.