

УДК 517.946.8

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. БИЦАДЗЕ

ВЛИЯНИЕ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ НА КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим гиперболическую систему

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которой являются квадратными матрицами второго порядка

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

а $u = (u_1, u_2)$.

Под характеристическими задачами для гиперболических систем понимаются задачи, в которых носителями данных являются характеристики этой системы.

Пусть область $\mathcal{D}$ плоскости переменных x, y представляет собой квадрат, ограниченный отрезками AB, BC, CD, DA соответственно характеристик $x-y=0, x+y=1, x-y=1, x+y=0$ системы (1).

В заметке ⁽¹⁾ нами показано, что при $a=b=0$ характеристическая задача нахождения регулярного в области $\mathcal{D}$ решения u системы (1), удовлетворяющего условиям

$$u|_{AB}=f_1, \quad u|_{AD}=f_2, \quad f_1=(f_1^1, f_1^2), \quad f_2=(f_2^1, f_2^2), \quad (2)$$

поставлена некорректно. В настоящей заметке на простых примерах раскрывается эффект влияния младших членов на корректность постановки различных вариантов характеристических задач.

Пример 1. Пусть матрицы a и b имеют вид

$$a = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{vmatrix},$$

где λ — действительная постоянная, отличная от нуля.

Перепишем систему (1) в виде

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

где $\xi = x+y, \eta = x-y$,

$$w^*(\xi, \eta) = w\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right), \quad v^*(\xi, \eta) = v\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

$$w = u_1 + u_2, \quad v = u_1 - u_2.$$

Легко видеть, что общее решение системы (3) дается формулой

$$w^*(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi) + \psi_1(\eta) - \int_0^\xi \varphi_1(t) I_0(\lambda \sqrt{\eta(\xi-t)})_t dt - \\ - \int_0^\eta \psi_1(\tau) I_0(\lambda \sqrt{\xi(\eta-\tau)})_\tau d\tau + \int_0^\xi dt \int_0^\eta \varphi(\tau) I_0(\lambda \sqrt{(\xi-t)(\eta-\tau)}) d\tau, \quad (4)$$

$$v^*(\xi, \eta) = \frac{2}{\lambda} \int_0^\eta \frac{\partial^2 w^*(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\tau + \psi(\xi), \quad (5)$$

где $\varphi_1, \psi_1, \varphi, \psi$ — произвольные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции, а

$$I_0(\lambda \sqrt{(\xi-t)(\eta-\tau)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2n} \frac{(\xi-t)^n (\eta-\tau)^n}{n!^2}.$$

Условия (2) в терминах новых переменных ξ, η, w^*, v^* запишутся в виде

$$w^*(\xi, 0) = f_1^1 \left(\frac{\xi}{2} \right) + f_1^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) = e(\xi); \quad (6)$$

$$v^*(\xi, 0) = f_1^1 \left(\frac{\xi}{2} \right) - f_1^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) = f(\xi); \quad (7)$$

$$w^*(0, \eta) = f_2^1 \left(\frac{\eta}{2} \right) + f_2^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) = g(\eta); \quad (8)$$

$$v^*(0, \eta) = f_2^1 \left(\frac{\eta}{2} \right) - f_2^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) = h(\eta); \quad (9)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Покажем, что в классе $C^3(\mathcal{D})$ (естественно, при требовании соответствующей степени гладкости от данных) задача (1), (2) в рассматриваемом случае всегда имеет, и притом единственное, решение.

В самом деле, на основании (4), (5), (6), (7), (8) имеем

$$\varphi_1(\xi) + \psi_1(0) = e(\xi), \quad \psi_1(\eta) + \varphi_1(0) = g(\eta), \quad \varphi_1(0) + \psi_1(0) = w^*(0, 0), \\ \psi(\xi) = f(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Отсюда находим, что общее решение системы (3), удовлетворяющее условиям (6), (7), (8), имеет вид

$$w^*(\xi, \eta) = e(\xi) + g(\eta) - e(0) I_0(\lambda \sqrt{\xi \eta}) - \int_0^\xi e(t) I_0(\lambda \sqrt{\eta(\xi-t)})_t dt - \\ - \int_0^\eta g(\tau) I_0(\lambda \sqrt{\xi(\eta-\tau)})_\tau d\tau + \int_0^\xi dt \int_0^\eta \varphi(\tau) I_0(\lambda \sqrt{(\xi-t)(\eta-\tau)}) d\tau, \quad (10)$$

$$v^*(\xi, \eta) = \frac{2}{\lambda} \int_0^\eta \frac{\partial^2 w^*(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\tau + f(\xi). \quad (11)$$

В силу (9), (10) и (11) для определения функции φ получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^\eta d\tau \int_0^\tau (\tau - \tau_1) \varphi(\tau_1) d\tau_1 = \alpha(\eta), \quad (12)$$

где

$$\alpha(\eta) = \frac{2}{\lambda} [h(\eta) - h(0)] - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 e''(0) \eta^{-1/2} e'(0) \eta^2 - \\ - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \int_0^\eta d\tau \int_0^\tau (\tau - \tau_1) g(\tau_1) d\tau_1. \quad (13)$$

Из равенства (13) в силу принятых выше предположений относительно гладкости искомого решения заключаем, что функция $\alpha(\eta) \in C^3$, $0 \leq \eta \leq 1$, причем

$$\alpha(0) = 0,$$

$$\alpha'(0) = - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 w^*(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v^*(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} = 0,$$

$$\alpha''(0) = \frac{2}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 v^*(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial w^*(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} = 0.$$

Отсюда следует, что интегральное уравнение (12) имеет единственное решение $\varphi(\eta) = \alpha'''(\eta)$, и тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (1), (2).

Пример 2. Матрицы a и b имеют вид

$$a = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{vmatrix},$$

где λ — положительная постоянная. В принятых выше обозначениях система (1) эквивалентна двум уравнениям

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial w^*}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} = 0,$$

откуда непосредственно следует, что для системы (1) при $\lambda > 0$ корректно поставлена задача отыскания регулярного в области $\mathcal{D}$ решения $u = (u_1, u_2)$, удовлетворяющего, наряду с условиями (2), еще и условиям

$$(u_1 + u_2)_{BC} = f_3, \quad (u_1 - u_2)_{CD} = f_4,$$

если только заданные функции $f_1^1, f_1^2, f_2^1, f_2^2, f_3, f_4$ подчинены известным требованиям из теории первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пример 3. Когда

$$a = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix},$$

система (1) эквивалентна опять двум уравнениям

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = 0 \quad (14)$$

и, следовательно, в этом случае правильно поставлена задача с краевыми условиями

$$(u_1 + u_2)_{AD} = f_1, \quad (u_1 + u_2)_{BC} = f_2, \\ (u_1 - u_2)_{AB} = f_3, \quad (u_1 - u_2)_{CD} = f_4. \quad (15)$$

Приведенные выше примеры, наряду с примерами из (1), показывают, что в краевой задаче для гиперболических систем вида

$$\sum_{i,j=1}^n A^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n B^j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = F, \quad (16)$$

$$F = (F_1, \dots, F_m), \quad u = (u_1, \dots, u_m),$$

с матричными $m \times m$ коэффициентами A^{ij} , B^j , C в области $\mathcal{D}$ пространства переменных $x_1, \dots, x_n$, ограниченной $(n-1)$ -мерными характеристическими многообразиями этой системы, наперед заданными на разных участках границы $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$, естественно считать l -мерные векторы

$$\sum_{i=1}^n G^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Gu = f, \quad (17)$$

где G^i , G — прямоугольные матрицы ширины m и высоты l , $0 \leq l \leq m$. Число l показывает, в какой мере заняты отдельные участки $\partial\mathcal{D}$; в частности, $l=0$ означает, что соответствующий участок $\partial\mathcal{D}$ свободен от краевых условий полностью.

Желательно, чтобы в условиях корректности задачи (16), (17) участвовали все коэффициенты A^{ij} , B^j , C , G^i , G . При выводе таких условий весьма полезную роль может играть фундаментальное решение системы (16), но его существование, к сожалению, удастся доказать лишь для узкого класса гиперболических систем.

Когда возможна эквивалентная редукция задачи (16), (17) к соответствующей задаче для системы первого порядка, при установлении условий корректности исходной задачи с успехом можно пользоваться выводами работ (2-4).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. В. Бицадзе, ДАН, т. 23, № 6 (1975). ² В. С. Владимиров, Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972. ³ O. K. Fridrichs, Comm. Pure and Appl. Math., v. 11 (1958). ⁴ А. А. Дезин, ДАН, т. 135, № 5 (1960).