

Академик Г. И. МАРЧУК

ОКРУЖАЮЩАЯ СРЕДА И ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В настоящей работе будут рассмотрены методы размещения промышленных объектов и комплексов с учетом минимального загрязнения окружающей среды.

1. Предположим, что промышленное предприятие выбрасывает в атмосферу в единицу времени количество аэрозоля φ , который переносится воздушными массами и диффундирует под влиянием мелкомасштабной турбулентности.

Если u , v и w — компоненты скорости частиц воздуха, то перенос субстанции φ в атмосфере описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - p\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \Delta \varphi + Q\omega(r) \quad (1.1)$$

при условии

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \varphi = 0 \quad \text{при } z=0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z=z_H, \quad (1.2)$$

где α и β — заданные функции (x, y) , Q — количество выбрасываемого аэрозоля в единицу времени в окрестности предприятия, $\omega(r)$ — функция распределения источника в окрестности r_0 .

На достаточно большом расстоянии от источника предполагается, что не выпавший на поверхность Земли аэрозоль имеет концентрацию, близкую к нулю, так что можно положить

$$\varphi = 0 \quad \text{на } S, \quad (1.3)$$

где S — граница области D . Будем предполагать, что $S = \sigma \times H$ и является цилиндрической, где σ — проекция S на плоскость $z=0$, H — область определения решения по высоте $0 \leq z \leq z_H$, где z_H — условная верхняя граница атмосферы. Всюду в дальнейшем S_α будем обозначать границы пространственных областей D_α , σ_α — границы плоских областей, являющихся проекциями S_α на плоскость $z=0$.

Величина p , связанная с поглощением субстанции, является, вообще говоря, функцией координат и времени. Коэффициенты турбулентности ν и μ выбираются на основе теории статистической турбулентности и описывают размывание аэрозольного факела мелкомасштабной турбулентностью.

Компоненты скорости u , v и w в (1.1) удовлетворяют уравнению неразрывности $du/dx + dv/dy + dw/dz = 0$.

Ради простоты будем считать, что источник аэрозолей распределен равномерно в области σ_ϵ (в окрестности точки $M(r)$), где размещено предприятие, и аэрозоль выбрасывается в атмосферу не выше $z=h$. Таким образом, функция $\omega(r_0)$ имеет вид $\omega(r_0) = 1/(\Delta \sigma_\epsilon h)$, если $M(x_0, y_0) \in \sigma_\epsilon$ и $z \leq h$, и равна нулю вне указанной области.

При заданной функции распределения источника $\omega(r_0)$ и его мощности Q требуется найти решение задачи (1.1) (1.2) (1.3) с годовым периодом T , т. е.

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, T). \quad (1.4)$$

2. В уравнении (1,1) горизонтальная турбулентность учитывается только для описания диффузии аэрозольного факела. Такую турбулентность будем называть мелкомасштабной.

Мы пойдем по пути прямого моделирования макротурбулентного процесса, сущность которого состоит в следующем.

Воспользуемся ежедневными климатическими данными о компонентах скорости ветра. После этого решается задача (1,1) — (1,4) до наступления периодичности по отношению к годовому циклу. Полученное решение осредняется за год. В результате будем иметь

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt, \quad (2,1)$$

$\bar{\varphi}$ — осредненная концентрация аэрозоля.

Нашей основной задачей будет оценка концентрации аэрозолей над избранным регионом — в области D_0 — или их некоторый функционал

$$B = \frac{1}{T} \int dt \int_{D_0} \eta \varphi dD, \quad (2,2)$$

где $\eta(x, y, z)$ — заданная функция, связанная с санитарными нормами загрязнения.

3. Для решения задачи об оптимальном расположении предприятия нам необходимо ввести в рассмотрение сопряженную задачу по отношению к исходной (1,1) — (1,4). С этой целью рассмотрим гильбертово пространство функций F со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_0^T dt \int_D \varphi \psi dD, \quad (3,1)$$

где φ и ψ принадлежат F , T — интервал времени, равный году, D — область определения решения. Пусть каждый элемент гильбертова пространства F удовлетворяет граничным условиям (1,2), (1,3) и условию периодичности $\varphi(\mathbf{r}, 0) = \varphi(\mathbf{r}, T)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} - p - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} - \mu \Delta.$$

Тогда в области $T \times D$ задача (1,1) — (1,3) может быть записана в форме

$$L\varphi = Q\omega(\mathbf{r}). \quad (3,2)$$

В классе вещественных функций введем в рассмотрение сопряженный оператор с помощью тождества Лагранжа

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^*\varphi^*), \quad (3,3)$$

где $\varphi^* \in F^*$, F^* — новое гильбертово пространство, L^* — сопряженный оператор. Техника получения сопряженных операторов и построения сопряженных пространств F^* хорошо известна. В результате приходим к следующему оператору:

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial z} - p - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} - \mu \Delta.$$

Что касается гильбертова пространства сопряженных функций F^* , то оно состоит из суммируемых с квадратом элементов φ^* , удовлетворяющих

следующим граничным условиям:

$$\alpha \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \beta \varphi^* = 0 \text{ при } z=0; \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z=z_n, \quad (3,4)$$

$$\varphi^* = 0 \text{ на } S.$$

Вводим далее в рассмотрение сопряженные уравнения в формальном виде

$$L^* \varphi^* = \xi, \quad (3,5)$$

где ξ — некоторая пока неопределенная функция координат и времени.

Уравнение (3,5) запишем в эквивалентной форме

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - v \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - w \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - p \varphi^* = \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \mu \Delta \varphi^* + \xi \quad (3,6)$$

при условиях (3,4). В качестве данных по времени возьмем условие периодичности решения за интервал T , т. е.

$$\varphi^*(r, 0) = \varphi^*(r, T). \quad (3,7)$$

Покажем теперь, что сопряженная задача связана с оценкой загрязнения окружающей среды аэрозолем. В самом деле, основное уравнение (3,2) скалярно умножим на φ^* , а сопряженное уравнение (3,5) — на φ , и результаты вычтем. Тогда получим

$$(\varphi^*, L\varphi) - (\varphi, L^*\varphi^*) = (\xi, \varphi) - Q(\omega, \varphi^*). \quad (3,8)$$

Учитывая тождество (3,3), в результате получим

$$(\xi, \varphi) = Q(\omega, \varphi^*), \quad (3,9)$$

или, в интегральной форме,

$$\int_0^T dt \int_D \xi \varphi dD = \frac{Q}{T} \int_0^T \varphi^*(r_0, t) dt, \quad (3,10)$$

если Q не зависит от времени; здесь обозначено

$$\varphi^*(r_0, t) = \int_{\sigma_g} dS \int_0^h dz \frac{T}{\Delta \sigma_g \cdot h} \varphi^*(r, T).$$

Сравнивая левую часть соотношения (3,10) с выражениями (2,2), мы видим, что если положить

$$\xi = \eta/T, \quad r \in D_0 \quad (3,11)$$

и $\xi = 0$ вне этой области, то левая часть выражения (3,11) окажется равной исследуемому функционалу B .

Таким образом, если сформулирована сопряженная задача с правой частью в виде (3,11), решение ее мы обозначим φ_B^* , то из соотношения (3,10) следует

$$B = Q \overline{\varphi_B^*(r_0)} = \frac{Q}{T} \int_0^T \varphi_B^*(r_0, t) dt. \quad (3,12)$$

Итак, величина B вычисляется либо при помощи решения основных задач, как это следует из формулы (2,2), или при помощи сопряженных задач в соответствии с формулой (3,12). В этом проявляется принцип двойственности по отношению к функционалам задач.

Если местоположение предприятия определено, то можно решить основную задачу (1,1) — (1,3) при условии годовой периодичности методом, изложенным выше. В результате решения получаем полную информацию о климатическом распределении аэрозоля во всей области D . После этого можно ставить задачу о влиянии аэрозольного загрязнения на микроклимат региона σ .

4. Теперь формулировку задачи несколько изменим, а именно, будем полагать, что место размещения объекта не фиксируется. Тогда точку с координатами r_0 будем считать текущей и изменять. Функция φ_v^* , зависящая только от r_0 , будет давать оценку взвешенных аэрозолей, если источник аэрозолей единичной мощности $Q=1$ поместить в точку M с координатой r_0 . Имеем решение сопряженных задач, и, задаваясь мощностью источника Q , мы можем выделить те области района σ , которые будут удовлетворять санитарным нормам загрязнения населенного пункта и его окрестностей.

Дальнейшая задача выбора места в указанной зоне уже связана с экономическими проблемами и ресурсами. Это классическая задача линейного программирования с ограничениями. Ограничения зависят, в частности, от рельефа, геологической структуры местности, от расположения парковых зон, сельскохозяйственных угодий и т. д.

Поскольку наша задача линейная, то полученная функция $\overline{\varphi_v^*}$ может быть использована для планирования размещения n различных заводов с выбросом аэрозолей $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ соответственно. Тогда общее загрязнение будет рассчитываться по формуле

$$B(M) = \sum_{i=1}^n Q_i \overline{\varphi_v^*(r_i)}; \quad (4,1)$$

здесь M — точки области σ , в окрестности которых размещены предприятия. Предполагается, что высота выброса всех предприятий одна и та же. Обобщение на разные уровни выбросов тривиально.

Данная постановка задачи допускает многочисленные обобщения.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. И. Марчук, Методы вычислительной математики, Новосибирск, «Наука», 1973.