

В. А. КАКИЧЕВ

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПСЕВДОРЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПОЛНЫХ БИСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ КОШИ И НОРМАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 17 II 1976)

1°. Сначала приведем некоторые обозначения и понятия. Действующий в  $L_p(\Gamma)$  при  $1 < p < +\infty$  полный бисингулярный оператор (п.б.о.) с ядрами Коши

$$(S^a \varphi)(t_1, t_2) = a_0(t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{a_1(t_1, \tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} \varphi(\tau_1, t_2) d\tau_1 + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{a_2(t_1, t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} \varphi(t_1, \tau_2) d\tau_2 - \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Gamma} \frac{a_{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (1)$$

где  $a = (a_0, a_1, a_2, a_{12})$ ,  $\Gamma_k$  — замкнутый контур Ляпунова, охватывающий точку плоскости  $z_k = 0$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ , функции  $a_j \in H$ ,  $j = 0, 1, 2, 12$ , удовлетворяют условию Гёльдера по совокупности переменных, представим в виде (1)

$$S^a = \hat{S}^a + U^a + V^a + W^a; \quad (2)$$

здесь  $\hat{S}^a = \hat{a}_0 I + \hat{a}_1 S_1 + \hat{a}_2 S_2 + \hat{a}_{12} S_{12}$  — характеристический бисингулярный оператор, где

$$\hat{a}_j(t_1, t_2) = a_j|_{\tau_1=t_1, \tau_2=t_2}, \quad S_k \psi = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (\tau_k - t_k)^{-1} \psi|_{\tau_l=t_l} d\tau_k,$$

$$j = 0, 1, 2, 12, \quad k \neq l, \quad l = 1, 2;$$

$I$  — тождественный оператор и  $S_{12} = S_1 S_2 = S_2 S_1$ ;  $U^a = S_1 U_2^a + U_1^a S_2$ ,  $V^a = V_1^a + V_2^a$  и  $W^a$  — соответственно смешанная, псевдoreгулярная и регулярная части оператора (1), в которых ядра

$$u_k^a = (a_{12}|_{\tau_l=t_l} - \hat{a}_{12}) / \pi i (\tau_k - t_k), \quad v_k^a = (a_k - \hat{a}_k) / \pi i (\tau_k - t_k)$$

одномерных интегральных операторов  $U_k^a$  и  $V_k^a$  слабо полярны относительно  $\tau_k - t_k$  и удовлетворяют по параметру  $t_l$ ,  $l \neq k$ ,  $l, k = 1, 2$ , условию Гёльдера, а ядро  $w^a$  оператора  $W^a$  слабополярно по  $\tau_1 - t_1$  и  $\tau_2 - t_2$ .

Обратно, каждому оператору (2) соответствует оператор (1) с коэффициентами

$$a_0 = \hat{a}_0, \quad a_k = \hat{a}_k + \pi i (\tau_k - t_k) v_k^a, \quad k = 1, 2, \\ a_{12} = \hat{a}_{12} + \pi i [(\tau_1 - t_1) u_1^a + (\tau_2 - t_2) u_2^a] - \pi^2 (\tau_1 - t_1) (\tau_2 - t_2) w^a.$$

Через  $s_p(H)$  и  $\xi_p(H)$  обозначим минимальные банаховы алгебры операторов, действующих в  $L_p(\Gamma)$ , содержащих все операторы вида  $S^a$  и  $S^a - \hat{S}^a$ , а через  $\tilde{\xi}_p(H)$ ,  $\mathfrak{p}_p(H)$ ,  $\tilde{w}_p(H)$ ,  $\tilde{\xi}_p^k(H)$  множества операторов вида

$$I + U^a + V^a + W^a, \quad I + V^a + W^a, \quad I + W^a, \quad F_k^a = I + S_k U_l^a + V_l^a + W^a, \\ k \neq l, \quad k, l = 1, 2.$$

Будем говорить, что оператор  $S^a$  имеет нормальную характеристическую часть, если четыре функции

$$\hat{a}_{(k,l)}(t_1, t_2) = \hat{a}_0 + k \hat{a}_1 + l \hat{a}_2 + k l \hat{a}_{12}, \quad k^2 = l^2 = 1,$$

которые назовем  $\mu$ -символом (ср. <sup>(2)</sup>) оператора  $S^a$ , не обращаются в нуль на  $\Gamma$ . Множество таких операторов обозначим через  $s_p^N(H)$ .

$\sigma$ -Символом оператора  $S^a$  назовем (см. <sup>(3)</sup>) две пары однопараметрических (с параметром  $t_l$ ) семейств полных сингулярных операторов

$$(\hat{a}_0 \pm \hat{a}_l)I + (\hat{a}_k \pm \hat{a}_{l2})S_k + V_k^a \pm U_k^a, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2. \quad (3)$$

Договоримся  $\sigma$ -символ называть обратимым справа (слева), если обратимы справа (слева) все входящие в (3) операторы.

2°. Вопрос о регуляризации оператора  $S^a$  с помощью композиции его с аналогичным оператором  $S^b$  впервые изучался в работе автора <sup>(1)</sup>. Существенный вклад в теорию таких операторов сделан в работах <sup>(3, 4)</sup> И. Б. Симоненко, опирающихся на им же разработанный локальный метод исследования линейных операторов <sup>(5, 6)</sup>. В работах <sup>(4)</sup> и <sup>(3)</sup> в терминах  $\mu$ -символа и  $\sigma$ -символа были сформулированы необходимые и достаточные условия нётеровости соответственно операторов  $\hat{S}^a$  и  $S^a$ , действующих в  $L_2(T)$ , где  $T$  — тор. Впоследствии результаты И. Б. Симоненко были обобщены В. С. Пилиди <sup>(7, 8)</sup> на операторы  $\hat{S}^a$  и  $S^a$ , действующие в  $L_p(\Gamma)$ . Далее, индекс нётерова оператора  $S^a$  вычислен в <sup>(9)</sup> (см. еще <sup>(10)</sup>), а регуляризатор нётерова оператора  $\hat{S}^a$  найден в <sup>(11)</sup>.

Работы <sup>(3, 8)</sup> позволили автору переосмыслить результаты, полученные им в <sup>(1)</sup>, и дополнить исследования этих работ в следующем направлении. Элементарными методами статьи <sup>(1)</sup> дано поэтапное построение односторонних регуляризаторов оператора  $S^a$  из  $s_p^N(H)$ , использующее одностороннюю обратимость четырех однопараметрических семейств операторов вида  $I + V_k^c$ , более простых, чем входящие в  $\sigma$ -символ операторы (3). С этой целью в п. 3° <sup>(4°)</sup> на первом (втором) этапе построением антихарактеризатора (одностороннего псевдoreгуляризатора) получен оператор из  $\tilde{\xi}_p(H)$  ( $\tilde{\rho}_p(H)$ ), а затем в п. 5° — на третьем этапе — собственно односторонний регуляризатор. Если нельзя найти односторонний регуляризатор, то, учитывая некоторые условия, достигнутые (см., например, <sup>(12-14)</sup>) при изучении операторов из  $\tilde{\rho}_p(H)$ , можно ограничиться вторым этапом — нахождением одностороннего псевдoreгуляризатора.

3°. Прежде всего отметим леммы, вытекающие непосредственно из формул композиции и первой части теоремы 1, приведенных в <sup>(1)</sup>.

**Лемма 1.** *Имеют место равенства*

$$\mu(S^a S^b) = \mu(S^a) \cdot \mu(S^b) = \mu(S^b) \cdot \mu(S^a),$$

$$\sigma(S^a S^b) = \sigma(S^a) \cdot \sigma(S^b), \quad \widehat{S^a S^b} = \widehat{S^b S^a},$$

где произведение символов надо понимать как покомпонентное.

**Лемма 2.** *Множества  $s_p^N(H)$ ,  $\tilde{\xi}_p(H)$ ,  $\tilde{\rho}_p(H)$ ,  $\tilde{\omega}_p(H)$  и  $\tilde{\xi}_p^k(H)$  являются группами относительно композиции операторов. Фактор-алгебра  $s_p(H)/\tilde{\xi}_p(H)$  и множество  $s_p^N(H)/\tilde{\xi}_p(H)$  коммутативны относительно прямого произведения операторов, определяемого естественным образом:  $\hat{S}^a \times \times \hat{S}^b = \widehat{S^a S^b}$ , где  $S^a$  — представитель класса  $\{S^a\} = \hat{S}^a + \tilde{\xi}_p(H)$ .*

**Лемма 3.** *Для всякого п.б.о.  $S^a$  из  $s_p^N(H)$  существует единственным образом определяемый антихарактеризатор, т. е. оператор  $\hat{S}^b$  такой, что  $\hat{S}^b S^a$  и  $S^a \hat{S}^b$  принадлежат  $\tilde{\xi}_p(H)$ . Коэффициенты  $\hat{S}^b$  определяются по формулам*

$$\hat{b}_0 = \alpha_{(1, 1)}, \quad \hat{b}_1 = \alpha_{(-1, 1)}, \quad \hat{b}_2 = \alpha_{(1, -1)}, \quad \hat{b}_{12} = \alpha_{(-1, -1)},$$

где

$$4\alpha_{(h, l)} = \hat{a}_{(1, 1)}^{-1} + k\hat{a}_{(-1, 1)}^{-1} + l\hat{a}_{(1, -1)}^{-1} + kl\hat{a}_{(-1, -1)}^{-1}, \quad k^2 = l^2 = 1.$$

Л е м м а 4. Если  $S^b$  — антихарактеризатор для  $S^a$ , то имеют место равенства вида

$$S^a \hat{S}^b = F_1^c F_2^c + W^\alpha = F_2^c F_1^c + W^\beta, \quad \hat{S}^b S^a = F_1^d F_2^d + W^\gamma = F_2^d F_1^d + W^\delta.$$

В частности, если  $S^a$  — нётеров оператор, то (ср. (9))

$$\text{Ind } S^a + \text{Ind } \hat{S}^b = \text{Ind } F_1^c + \text{Ind } F_2^c = \text{Ind } F_1^d + \text{Ind } F_2^d.$$

Заметим, что если характеристические части операторов  $\sigma$ -символа оператора  $S^a$  обратимы слева (справа), то  $S^a$  допускает представление вида (ср. (9)):

$$S^a = \hat{S}^a (I + U^b + V^b) + W^b \quad (S^a = (I + U^c + V^c) \hat{S}^a + W^c).$$

4°. Оператор  $S^b$  называется <sup>(15)</sup> левым (правым) регуляризатором оператора  $S^a$ , если  $S^r = S^b S^a$  ( $S^r = S^a S^b$ ), принадлежит  $\tilde{w}_p(H)$ . Чтобы  $S^b$  был левым (правым) регуляризатором оператора  $S^a$  из  $\tilde{\zeta}_p(H)$ , необходимо и достаточно, чтобы <sup>(1)</sup>  $u_k^r = v_k^r = 0$ ,  $k=1, 2$ . В операторной форме эти условия для оператора  $\hat{S}^b S^a$  ( $S^a \hat{S}^b$ ) можно записать так:

$$\begin{cases} V_k^b A_k + U_k^b B_k = H_k, \\ V_k^b B_k + U_k^b A_k = G_k \end{cases} \quad \left( \begin{cases} A_k V_k^b + B_k U_k^b = H_k \\ B_k V_k^b + A_k U_k^b = G_k \end{cases} \right), \quad k=1, 2, \quad (4)$$

где

$$A_k = \hat{a}_0 I + a_k S_k + V_k^a, \quad B_k = \hat{a}_1 I + \hat{a}_{12} S_k + U_k^a, \quad k \neq l, \quad k, l=1, 2,$$

а ядра операторов  $H_k$  и  $G_k$  обладают теми же свойствами (см. 1°), что и ядра  $u_k^a$  и  $v_k^a$ , и выражаются через коэффициенты оператора  $S^a$  из  $s_p^N(H)$  и коэффициенты его антихарактеризатора  $\hat{S}^b$ .

Непосредственно из (4) и теоремы 3 работы <sup>(1)</sup> вытекает.

Т е о р е м а 1. Если  $\sigma$ -символ оператора  $S^a$  из  $s_p^N(H)$  обратим справа (слева), то оператор  $S^a$  имеет левый (правый) регуляризатор  $S^b$ , принадлежащий  $s_p^N(H)$ , и, следовательно, является  $\Phi_+(\Phi_-)$ -оператором <sup>(15)</sup>.

Если п.б.о. не имеет односторонних регуляризаторов, то возрастает роль частичных регуляризаторов <sup>(11)</sup> и псевдoreгуляризаторов. Оператор  $R_k^b$  ( $\Pi_k^b$ ) назовем левым или правым  $k$ -регуляризатором ( $k$ -псевдoreгуляризатором) если оператор  $S^r = R_k^b S^a$  ( $S^r = \Pi_k^b S^a$ ) или  $S^r = S^a R_k^b$  ( $S^r = S^a \Pi_k^b$ ) таков, что  $\hat{r}_k = \hat{r}_{12} = u_l^r = v_l^r = 0$  ( $\hat{r}_k = \hat{r}_{12} = u_l^r = 0$ ),  $k \neq l$ ,  $k, l=1, 2$ .

Оператор  $\Pi^b$  назовем левым (правым) псевдoreгуляризатором для  $S^a$ , если  $\Pi^b S^a$  ( $S^a \Pi^b$ ) из  $\tilde{\rho}_p(H)$ .

В силу леммы 3 для построения односторонних регуляризаторов (псевдoreгуляризаторов) операторов из  $s_p^N(H)$  достаточно овладеть техникой нахождения их для операторов из  $\tilde{\zeta}_p(H)$ . В силу леммы 4 оператор  $F^c$  из  $\tilde{\zeta}_p(H)$  имеет левый или правый регуляризатор  $I + U^v + V^v$  (псевдoreгуляризатор  $I + U^v$ ) тогда и только тогда, когда он имеет соответственно левые или правые регуляризаторы вида  $R_k^v = I + S_k U_l^v + V_l^v$  (псевдoreгуляризаторы вида  $\Pi_k^v = I + S_k U_l^v$ ),  $k \neq l$ ,  $k, l=1, 2$ . В этом случае в качестве регуляризатора (псевдoreгуляризатора) можно взять любой из операторов  $R_1^v R_2^v$  и  $R_2^v R_1^v$  ( $\Pi_1^v \Pi_2^v$  и  $\Pi_2^v \Pi_1^v$ ). Достаточные условия существования частичных регуляризаторов (псевдoreгуляризаторов) для оператора  $F^c$  содержатся в теореме 2 работы <sup>(1)</sup>, а также могут быть найдены из соответствующих равенств вида (4).

5°. В результате имеет место основная

Т е о р е м а 2. Пусть  $\hat{S}^b$  — антихарактеризатор п.б.о.  $S^a$  из  $s_p^N(H)$  и  $F^c = \hat{S}^b S^a$  ( $F^d = S^a \hat{S}^b$ ).

1. Если при всех значениях параметра  $t_k \in \Gamma_k$ ,  $k=1, 2$ , обратимы справа (слева) операторы  $I + V_l^c$  ( $I + V_l^d$ ),  $l=1, 2$  и  $l \neq k$ , со слабо полярными ядрами относительно  $\tau_l - t_l$ , то оператор  $S^a$  имеет левый (правый) псевдoreгу-

$$\Pi_k^b = (I + S_1 U_2^r + U_1^r S_2) \hat{S}^b \quad (\Pi_\pi^b = \hat{S}^b (I + S_1 U_2^b + U_1^b S_2)),$$

где

$$U_k^r = -U_k^c (I + V_k^c)^{-1} \quad (U_k^b = -(I + V_k^d)^{-1} U_k^d), \quad k=1, 2.$$

2. Далее, если помимо этого, при всех значениях параметра  $t_k \in \Gamma_k$ ,  $k=1, 2$ , обратимы справа (слева) операторы

$$I + V_l^d = (I + V_l^c) [I - (U_l^b)^2]$$

$$(I + V_l^c = [I - (U_l^r)^2] (I + V_l^d)), \quad l \neq k, \quad l=1, 2,$$

со слабо полярными ядрами относительно  $\tau_l - t_l$ , то оператор  $S^a$  имеет левый (правый) регуляризатор

$$R_k^b = [I + S_1 (I + V_2^b) U_2^r + (I + V_1^b) U_1^r S_2 + V_1^b + V_2^b] \hat{S}^b$$

где

$$(R_\pi^b = \hat{S}^b [I + S_1 U_2^b (I + V_2^r) + U_1^b (I + V_1^r) S_2 + V_1^r + V_2^r]),$$

$$V_k^b = -V_k^d (I + V_k^d)^{-1} \quad (V_k^r = -(I + V_k^c)^{-1} V_k^c), \quad k=1, 2.$$

Сделаем еще два замечания. 1) Если частичные  $k$ -регуляризаторы

$$R_{k\lambda}^b = (I + V_l^b) (I + S_k U_l^r) \hat{S}^b, \quad R_{k\pi}^b = \hat{S}^b (I + S_k U_l^b) (I + V_l^r), \quad k=1, 2,$$

двусторонние, то оператор  $S^a$  имеет <sup>(11)</sup> двусторонние регуляризаторы вида

$$R_{1\lambda}^b + R_{2\lambda}^b - R_{1\lambda}^b S^a R_{2\lambda}^b, \quad R_{1\lambda}^b + R_{2\pi}^b - R_{1\lambda}^b S^a R_{2\pi}^b. \quad (5)$$

2) Оператор  $\Pi_1^b + \Pi_2^b - \Pi_1^b S^a \Pi_2^b$ , построенный аналогично (5) по двусторонним  $k$ -псевдорегуляризаторам, вообще говоря, не будет двусторонним псевдорегуляризатором для  $S^a$ .

Автор признателен И. Б. Симоненко за полезное обсуждение работы.

Ростовский государственный  
университет

Поступило  
16 II 1976

# ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. А. Какичев, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 7 (1967). <sup>2</sup> С. Г. Михлин, УМН, т. 3, в. 3 (1948). <sup>3</sup> И. Б. Симоненко, Функциональный анализ и его приложения, т. 5, в. 1 (1971). <sup>4</sup> И. Б. Симоненко, Матем. исслед., Кишинев, т. 3, в. 1 (1968). <sup>5</sup> И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, 567 (1965). <sup>6</sup> И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, 757 (1965). <sup>7</sup> В. С. Пилиди, ДАН, т. 201, № 4 (1971). <sup>8</sup> В. С. Пилиди, Матем. исслед., Кишинев, т. 7, в. 3 (1972). <sup>9</sup> В. С. Пилиди, Функциональный анализ и его приложения, т. 7, в. 4 (1973). <sup>10</sup> L. A. Coburn, R. G. Douglas, J. M. Singer, J. Diff. Geom., v. 5, № 4 (1972). <sup>11</sup> В. С. Пилиди, Л. И. Сазонов, ДАН, т. 217, № 2 (1974). <sup>12</sup> В. А. Какичев, Н. В. Коваленко, Укр. матем. журн., т. 25, № 3 (1973). <sup>13</sup> Л. М. Лихтарников, Дифференциальные уравнения, т. 11, № 6 (1975). <sup>14</sup> В. С. Пилиди, Матем. анализ и его прилож., Ростов-на-Дону, т. 7, 34 (1975). <sup>15</sup> И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, «Штиинца», 1973.