

Б. Н. КИМЕЛЬФЕЛЬД

ОДНОРОДНЫЕ ОБЛАСТИ НА ФЛАГОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ РАНГА 1

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 III 1976)

1. В 1968 г. Э. Б. Винберг поставил следующую задачу. Пусть L — полупростая группа Ли и P — ее параболическая подгруппа. Найти все подгруппы $G \subset L$, действующие локально транзитивно на флаговом многообразии $Q = L/P$, и их открытые орбиты в Q . Эти орбиты называются L -однородными областями в Q . В работе ⁽¹⁾ найдены все L -однородные области в Q в случае, когда $L = \mathrm{SO}(1, n)$, а в работе ⁽²⁾ содержится классификация всех связных подгрупп в $\mathrm{SO}(1, n)$, локально транзитивных на Q . В настоящей статье эти результаты обобщаются на случай, когда L — группа движений произвольного некомпактного симметрического риманова пространства ранга 1. На возможность и полезность такого обобщения автору указал Д. В. Алексеевский.

2. Всюду дальше M — n -мерное гиперболическое пространство $H^n(\mathbf{F})$ над алгеброй $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ (вещественные числа), $\mathbf{C}$ (комплексные числа), $\mathbf{H}$ (кватернионы) или $\mathbf{O}$ (октавы), причем если $\mathbf{F} = \mathbf{O}$, то $n = 2$; соответственно $L = \mathrm{SO}(1, n)$, $\mathrm{SU}(1, n)$, $\mathrm{Sp}(1, n)$ или $F_{4(-20)}$; K — максимальная компактная подгруппа в L , а P — единственная с точностью до сопряженности параболическая подгруппа в L . Алгебры Ли групп, обозначенных заглавными латинскими буквами, обозначаются соответствующими строчными готическими буквами.

3. Подмножество $\Gamma_{\mathfrak{M}}(G) = \{x \in \mathfrak{M} \mid \dim G(x) < \dim \mathfrak{M}\}$ в $\mathfrak{M}$ назовем множеством интранзитивности группы Ли G преобразований связного многообразия $\mathfrak{M}$. Всякая L -однородная область в Q совпадает с компонентой связности множества $Q \setminus \Gamma_q(G)$, где G — некоторая подгруппа в L . Поэтому классификация L -однородных областей в Q сводится к нахождению множеств интранзитивности всевозможных подгрупп группы L .

4. Напомним конструкцию компактификации Ф. И. Карпелевича пространства M и ее основные свойства (см. ^(3, 4)). Две направленные геодезические $\gamma = \gamma(t)$ и $\delta = \delta(t)$ (здесь и далее t , так же как и τ , — длина дуги) в M называются асимптотическими, если расстояние между точками $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ ограничено при $t > 0$. Асимптотичность является отношением эквивалентности и разбивает множество всех направленных геодезических на классы эквивалентности, которые называются k -пучками. Стационарная подгруппа $P_q = P$ k -пучка q является параболической подгруппой в L , и, следовательно, пространство Q можно отождествить с множеством k -пучков пространства M . Группа P_q действует транзитивно на множестве геодезических, входящих в k -пучок q . Через каждую точку пространства M проходит единственная геодезическая, принадлежащая k -пучку q .

5. Всякая редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{l}$ сопряжена относительно группы $\mathrm{Ad} L$ подалгебре $\mathfrak{g}$, допускающей разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{l} + \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{l} = \mathfrak{t} + \mathfrak{m}$ — разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{l}$. (Эта теорема доказана Карпелевичем в работе ⁽⁵⁾ в предположении, что подалгебра $\mathfrak{g}_1$ полупроста, однако приведенное там доказательство легко переносится на случай любой редуктивной подалгебры.) Из этой теоремы следует, во-первых, что всякая редуктивная подгруппа группы L имеет в M вполне геодезическую орбиту (см. ⁽⁵⁾), и во-вторых, что если редуктивная подгруппа в L действует

транзитивно на M , то она совпадает с L и, следовательно, действует транзитивно на Q (если $\dim M > 1$).

6. Если $\gamma(t)$ — геодезическая, не принадлежащая к-пучку q , и $\gamma_i(\tau)$ — такая геодезическая из q , что $\gamma_i(0) = \gamma(t)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}_i(0)) = -1. \quad (1)$$

Пусть M' — вполне геодезическое подмногообразие в M , $\partial M'$ — множество тех к-пучков, которые содержат геодезические, лежащие в M' , $q \in Q \setminus \partial M'$, $\gamma_m(\tau)$ — такая геодезическая из q , что $\gamma_m(0) = m \in M'$, и X_m^q — ортогональная проекция вектора $\dot{\gamma}_m(0)$ на касательное пространство к M' в точке m . Из (1) вытекает, что во всех точках сферы достаточно большого радиуса векторное поле X^q направлено «вовнутрь» этой сферы. Отсюда и из простых топологических соображений следует, что векторное поле X^q , будучи непрерывным⁽⁴⁾, обращается в нуль в некоторой точке $\mu(q) \in M'$. Эта точка является основанием единственного перпендикуляра, опущенного из точки $q \in Q$ на M' . Построенное таким образом отображение $\mu: Q \setminus \partial M' \rightarrow M'$ перестановочно со всяким движением из L , сохраняющим M' .

7. Через γ^- мы будем обозначать направленную геодезическую, получающуюся из геодезической γ изменением направления, т. е. $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$. Для любых двух несовпадающих к-пучков $q_1, q_2 \in Q$ найдется единственная геодезическая $\gamma \in q_1$, такая что $\gamma^- \in q_2$ ⁽⁴⁾.

8. Из п. 5 и 6 следует, что всякая редуцирующая подгруппа в P_q сохраняет некоторую геодезическую из q .

9. Пусть геодезическая $\gamma(t) = \text{Exp } tY$, $Y \in \mathfrak{m}$, содержится в к-пучке q . Обозначим через K_γ централизатор вектора Y в K , через A — однопараметрическую подгруппу параллельных сдвигов пространства M вдоль геодезической γ , а через q^- — к-пучок, содержащий геодезическую γ^- . Из п. 4 и 8 следует, что $P_q = K_\gamma AN$, где N — унипотентный радикал группы P_q . При этом группа $S = K_\gamma A$ не содержит унипотентных элементов. Отсюда и из п. 4 и 7 вытекает, что группа N действует просто транзитивно на $Q \setminus \{q\}$, т. е. отображение $\varphi: N \rightarrow Q \setminus \{q\}$, задаваемое формулой $\varphi(x) = x(q^-)$, является диффеоморфизмом. Легко видеть, что если $x, n \in N$, $s \in S$ и $g = sn \in P_q$, то формула $g(x) = snxs^{-1}$ определяет такое действие группы P_q на N , что $g(\varphi(x)) = \varphi(g(x))$ при всех $g \in P_q$ и $x \in N$. Поэтому если $G \subset P_q$, то

$$\Gamma_q(G) = \{q\} \cup \varphi(\Gamma_N(G)). \quad (2)$$

10. Из свойств корневого разложения группы L относительно максимального расщепимого над $\mathbf{R}$ тора $A \subset L$ (см. (6, 7)) вытекает, что алгебра Ли $\mathfrak{n}$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств $\mathfrak{n}_\alpha$ и $\mathfrak{n}_{2\alpha}$, каждое из которых инвариантно относительно группы $\text{Ad}_b S$, причем

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}_{2\alpha}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_{2\alpha}] = 0. \quad (3)$$

Линейную группу, определяемую действием группы K_γ на $\mathfrak{n}_\alpha$, обозначим через κ .

11. Определение. Пусть λ — группа линейных преобразований линейного пространства V . Собственное линейное подпространство $W \subset V$ называется λ -упакованным, если подгруппа преобразований из λ , сохраняющих W , действует транзитивно на сфере в пространстве V/W или если $\dim V/W = 1$. Собственное вполне геодезическое подмногообразие $M' = g(\text{Exp } \mathfrak{m}')$ в M , где $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$, $g \in L$, называется упакованным, если $\mathfrak{m}' = \text{Ad } l K$ -упакованное подпространство в $\mathfrak{m}$.

12. Лемма. Если подгруппа $G \subset P_q$ действует локально транзитивно, но не транзитивно на N , то $\Gamma_N(G) = x \exp(\mathfrak{v} + \mathfrak{n}_{2\alpha})$, где $\mathfrak{v}$ — κ -упакованное подпространство в $\mathfrak{n}_\alpha$, а $x \in N$.

Доказательство. Нетрудно показать, что $\Gamma_N(G) = \Gamma_N(\bar{G})$, где $\bar{G}$ — замыкание по Зарисскому группы G в P_q . Поэтому можно считать, что G — алгебраическая группа и, следовательно, допускает разложение Леви

$G=S_1N_1$. Так как группа $P_q/N \simeq S$ не содержит унипотентных элементов (п.9), то $N_1 \subset N$. Унипотентная подгруппа N_1 , будучи алгебраической, связана, и, значит, $N_1 = \exp \mathfrak{n}_1$. Из п. 8 следует, что $x^{-1}S_1x \subset S$ при некотором $x \in N$. Легко видеть, что $\Gamma_N(G) = x\Gamma_N(x^{-1}Gx)$. Ограничение указанного в п.9 действия группы P_q на N на подгруппу $x^{-1}S_1x \subset P_q$ состоит из автоморфизмов группы N , переставляющих между собой правые смежные классы группы N по подгруппе $x^{-1}N_1x$. Из локальной транзитивности группы $x^{-1}Gx$ на N следует локальная транзитивность группы $x^{-1}S_1x$ на фактор-пространстве $(x^{-1}N_1x) \backslash N$ и группы $\text{Ad}_b(x^{-1}S_1x)$ на $\mathfrak{n}/(\text{Ad } x^{-1})\mathfrak{n}_1$. Так как размерность максимальной компактной подгруппы в S_1 не меньше $\dim S_1 - 1$, то отсюда следует, что группа $\text{Ad}_b(x^{-1}S_1x)$ неприводима в $\mathfrak{n}/(\text{Ad } x^{-1})\mathfrak{n}_1$. Следовательно, либо $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset (\text{Ad } x^{-1})\mathfrak{n}_1$ либо $(\text{Ad } x^{-1})\mathfrak{n}_1 + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Из соотношений (3) вытекает, что в обоих случаях $(\text{Ad } x^{-1})\mathfrak{n}_1 \supset [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}_{2\alpha}$, т. е. $\mathfrak{n}_1$ — идеал в $\mathfrak{n}$. Таким образом, N_1 — нормальный делитель в N , инвариантный относительно группы автоморфизмов $x^{-1}S_1x$, причем $\Gamma_N(x^{-1}Gx) = \pi^{-1}(\Gamma_{N/N_1}(x^{-1}S_1x))$, где $\pi: N \rightarrow N/N_1$ — естественная проекция; $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{v} + \mathfrak{n}_{2\alpha}$, где $\mathfrak{v}$ — некоторое подпространство в $\mathfrak{n}_\alpha$; группа N/N_1 изоморфна векторной группе, на которой группа $x^{-1}S_1x$ действует конформными преобразованиями. Из локальной транзитивности действия группы $x^{-1}S_1x$ на N/N_1 следует, что $\mathfrak{v}$ — κ -упакованное подпространство в $\mathfrak{n}_\alpha$ и что $\Gamma_{N/N_1}(x^{-1}S_1x) = \{e\}$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_N(G) &= x\Gamma_N(x^{-1}Gx) = x\pi^{-1}(\Gamma_{N/N_1}(x^{-1}S_1x)) = \\ &= x\pi^{-1}(\{e\}) = xN_1 = x \exp(\mathfrak{v} + \mathfrak{n}_{2\alpha}).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

13. Теорема 1. Подмножество $\Gamma \subset Q$ тогда и только тогда является множеством интранзитивности некоторой локально транзитивной, но не транзитивной на Q подгруппы группы L , когда либо а) $\Gamma = \{q\}$, либо б) $\Gamma = \{q\} \cup \Phi(x \exp(\mathfrak{v} + \mathfrak{n}_{2\alpha}))$, где $q \in Q$, $\mathfrak{v}$ — κ -упакованное подпространство в $\mathfrak{n}_\alpha$ и $x \in N$, либо в) $\Gamma = \partial M'$, где M' — упакованное вполне геодезическое подмногообразие в M .

Доказательство. Пусть N_G — унипотентный радикал алгебраической подгруппы $G \subset L$. Группа N_G , будучи разрешимой, содержится в некоторой параболической подгруппе $P = P_q$ группы L , где $q \in Q$. Если $G \subset P_q$, то в силу соотношения (2) и леммы группа G действует локально транзитивно на Q тогда и только тогда, когда имеет место один из случаев а) или б). Допустим, что $G \not\subset P_q$, т. е. $gq \neq q$ при некотором $g \in G$. Согласно п. 7 существует единственная геодезическая $\gamma \ni q$ такая, что $\gamma^- \ni gq$. Так как $N_G(q) = q$ и $N_G(gq) = gq$, то $N_G(\gamma) = \gamma$, откуда следует, что $N_G = \{e\}$, т. е. что группа G редуктивна. В силу п. 4 можно считать, что группа G сохраняет некоторое собственное вполне геодезическое подмногообразие $M' \subset M$. Очевидно, что $\partial M' \subset \Gamma_Q(G)$ и что группа G тогда и только тогда действует локально транзитивно на Q , когда стационарная подгруппа G_x точки $x \in M'$ в G действует локально транзитивно на слое $\mu^{-1}(x)$ отображения $\mu: Q \setminus \partial M' \rightarrow M'$, построенного в п. 6, или, что то же самое, когда M' — упакованное вполне геодезическое подмногообразие в M . При выполнении этого условия $\Gamma_Q(G) = \partial M'$. Теорема 1 доказана.

14. Если $M = H^n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, то соответственно $\kappa = O(n-1)$, $U(n-1)$ или $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n-1)$. В этом случае $\mathfrak{n}_\alpha = \mathbb{F} \otimes \mathbb{R}^{n-1}$, а κ -упакованные подпространства в $\mathfrak{n}_\alpha$ — это ортогональные дополнения в $\mathfrak{n}_\alpha$ к подпространствам вида $\mathbb{F}' \otimes \mathfrak{w}_r$, где $\mathbb{F}'$ — любая подалгебра в $\mathbb{F}$, а $\mathfrak{w}_r$ — произвольное чисто вещественное подпространство в $\mathbb{R}^{n-1}$ размерности $r \leq n-2$. (Подпространство $\mathfrak{w} \subset \mathbb{F} \otimes \mathbb{R}^{n-1}$ называется чисто вещественным, если $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{w}^c = \{0\}$ при всех $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$. Здесь действие $\mathbb{F}$ на $\mathbb{F} \otimes \mathbb{R}^{n-1}$ определяется формулой $f(f' \otimes y) = (ff') \otimes y$ при $f, f' \in \mathbb{F}, y \in \mathbb{R}^{n-1}$). Если $M = H^2(\mathbb{O})$, то $\kappa = \text{Spin}(7)$ и можно показать, что собственное подпространство $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{n}_\alpha$ тогда и только тогда является κ -упакованным, когда $\dim \mathfrak{v} \neq 3$.

Упакованные вполне геодезические подмногообразия в $H^n(\mathbf{F})$ — это $H^r(\mathbf{F})$, $0 \leq r < n$, и (при $\mathbf{F} \neq \mathbf{R}$) $H^n(\hat{\mathbf{F}})$, где $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{R}$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{C}$ и $\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{H}$.

З а м е ч а н и е. Пересечение классов б) и в) подмножеств $\Gamma \subset Q$, указанных в формулировке теоремы 1, непусто и не совпадает ни с одним из этих классов. Оно состоит из подмножеств вида $\partial H^{r+1}(\mathbf{F}) = \{q\} \cup \varphi(\exp(n_{2\alpha} + \mathbf{F} \otimes \mathfrak{w}_r))$, $0 \leq r \leq n-2$.

15. Дадим теперь описание всех связных подгрупп в L , действующих локально транзитивно на Q . Пусть $\mathfrak{u}$ — произвольная подалгебра в $\mathfrak{f}_\gamma$, τ — ее центр, $\mathfrak{b}$ — максимальный полупростой идеал в $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{h}_0$ — централизатор алгебры $\text{Ли } \mathfrak{u}$ в $\mathfrak{n}_\alpha$; $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{z}_1$ — соответственно такие подпространства в $\mathfrak{h}_0$ и τ , что $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{z}_1 \leq \dim \tau$, $\mathfrak{h}$ — $\mathfrak{u}$ -инвариантное дополнение к $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{n}_\alpha$, $\mathfrak{z}$ — такое подпространство в $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{h}_1$, что $\dim \mathfrak{z} = \dim \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}_1 = \{0\}$, и τ_0 — произвольное подпространство в τ , дополнительное к $\mathfrak{z}_1$. Подалгебру $\mathfrak{n}_{2\alpha} + \mathfrak{h} + \mathfrak{b} + \tau_0 + \mathfrak{z}$ назовем подалгеброй Малышева в $\mathfrak{f}_\gamma + \mathfrak{n}$ (ср. (2)), стр. 637).

Теорема 2. Пусть подалгебра $\mathfrak{g} \not\subseteq \mathfrak{l}$ действует локально транзитивно на Q . Если $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли, то $\mathfrak{g} = \text{Ad } g(V' + \mathfrak{f})$, где $g \in L$, $V' = \mathfrak{m}' + [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']$ — алгебра Ли полной группы движений упакованного вполне геодезического подмногообразия $M' = \text{Exp } \mathfrak{m}' \subset M$, а $\mathfrak{f}$ — такая подалгебра централизатора алгебры Ли V' в $\mathfrak{f}$, что действие алгебры Ли $[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'] + \mathfrak{f}$ в пространстве $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'$ транзитивно на сфере.

Если $\mathfrak{g}$ — нередуктивная алгебра Ли, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}_q = \mathfrak{v}$ при некоторой $q \in Q$. Если при этом $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{f}_\gamma + \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{g}$ — некоторая подалгебра Малышева в $\mathfrak{f}_\gamma + \mathfrak{n}$.

Если же $\mathfrak{g} \not\subset \mathfrak{f}_\gamma + \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{g} = \text{Ad}_\mathbf{b} x(\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_{2\alpha})$, где $x \in N$, $\mathfrak{n}_1$ — κ -упакованное подпространство в $\mathfrak{n}_\alpha$, а $\mathfrak{z}_0$ — подалгебра в $\mathfrak{z}$, нормализующая $\mathfrak{n}_1$ и действующая локально транзитивно на $\mathfrak{n}_\alpha/\mathfrak{n}_1$.

Доказательство теоремы 2 в случае, когда $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли, легко следует из п. 4 и 6, а в случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нередуктивна, оно может быть получено из результатов работы (2).

Автор благодарит Э. Б. Винберга за внимание к работе и за ряд полезных советов и замечаний.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
18 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Н. Кимельфельд, Матем. заметки, т. 8, 321 (1970). ² Ф. М. Малышев, Матем. заметки, т. 16, 633 (1974). ³ Ф. И. Карпелевич, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 14, 48 (1965). ⁴ R. L. Bishop, B. O'Neil, Trans. Am. Math. Soc., v. 145, 1 (1969). ⁵ Ф. И. Карпелевич, ДАН, т. 93, № 3, 401 (1953). ⁶ O. Loos, Symmetric Spaces, v. 2, Benjamin, N. Y., 1969. ⁷ Э. Б. Винберг, Функц. анализ и его прилож., т. 9, в. 1, 20 (1975).