Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(74), 2012

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

Асимптотика эрмитовой аппроксимации экспонент

А.П. Старовойтов

В данной работе изучаются асимптотические свойства интегралов Эрмита. В частности, найдены асимптотики диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде для системы экспонент. Аналогичные результаты получены и для системы вырожденных гипергеометрических функций.
Ключевые слова: интегралы Эрмита, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде, асимптотические равенства.

The paper deals with asymptotic properties of Hermite integrals. In particular, the asymptotics of Hermite-Pade diagonal approximations for the system of exponents are determined. Similar results are proved for the system of confluent hypergeometric functions.
Keywords: Hermite integrals, Pade joint approximations, Hermite-Pade approximations, asymptotic equality.

Введение

Рассмотрим набор

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i,\ \ j=1,2,\dots,k \tag{1.1}$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n,m_1,m_2,\dots,m_k$. По определению полагаем $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$, $n_j=n+m-m_j,\ \ j=1,2,\dots,k$. Известно (см. [1]), что при $j=1,2,\dots,k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $deg\,Q_m\le m$, $deg\,P_{n_j}^j\le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z)=Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=A_j z^{n+m+1}+\dots. \tag{1.2}$$

Если $k=1$, то согласно теореме Паде ([2], теорема 1.1.1) многочлены $Q_m(z)$, $P_n^1(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z,f_1)=P_n^1(z)/Q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $k\ge 2$ дроби $\pi_{n,m}^j(z)=\pi_{n_j,m}^j(z;f_j)=P_{n_j}^j(z)/Q_m(z)$, $j=1,2,\dots,k$ условиями (1.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде для системы функций (1.1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем функций см. в [1], [3]–[5]). Совершенной является, например, система экспонент $f_j(z)=e^{\lambda_j z}$, $j=1,2,\dots,k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа (см. [1], теорема 2.1). Без формального определения этот факт был установлен Ш. Эрмитом [6].

В случае одной экспоненты e^z явные выражения для числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ получил Паде (см. [1]). Опираясь на полученные представления, он доказал, что при $n/m\to\gamma$, $0\le\gamma\le+\infty$ на компактах комплексной плоскости дроби $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ равномерно сходятся к e^z. О. Перрон [7] обобщил результаты о сходимости $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z, доказав ее при $n+m\to+\infty$. Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z-\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [8]: для любого комплексного z при $n+m\to+\infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z;e^{\xi}) = \frac{(-1)^m\, n!\, m!\, e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\,(n+m+1)!}\, z^{n+m+1}\ \ (1+o(1)). \tag{1.3}$$

При доказательстве асимптотического равенства (1.3) Д. Браесс опирается на полученные О. Перроном [7] интегральные представления числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$:

$$P_n^1(z;e^{\xi}) = \int_0^{\infty} t^m\,(t+z)^n\, e^{-t}dt, \quad Q_m(z;e^{\xi}) = \int_0^{\infty} t^n\,(t-z)^m\, e^{-t}dt.$$

Позже выяснилось (см., например, [1], [9]), что явный вид числителей и знаменателей аппроксимаций Паде для e^z и, более того, для совместных аппроксимаций Паде к набору экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{k}$ фактически был известен ещё Эрмиту.

Эрмит [6] ввел в рассмотрение интегралы

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty}[x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1}e^{-x}dx,\\ M_j &= \frac{e^j}{(p-1)!}\int_j^{\infty}[x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1}e^{-x}dx,\\ \varepsilon_j &= \frac{e^j}{(p-1)!}\int_0^{j}[x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1}e^{-x}dx, \end{aligned} \tag{1.4}$$

которые после небольших преобразований (см. [1], [9]) приводят к решению системы (1.2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$:

$$\begin{aligned} Q_m(z) &= \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,\\ P_{n_j}^{j}(z) &= \frac{e^{\lambda_j z}\, z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda)^{m_i}]e^{-zx}dx,\\ R_{n,m}^{j}(z) &= \frac{e^{\lambda_j z}\, z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx. \end{aligned} \tag{1.5}$$

В первых двух интегралах (1.5) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $Re z > 0$. При $Re z \geq 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^{j}(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^{j}(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

Интегралы Эрмита (1.4) при некоторых простых p дают удачное приближение к набору $\{e^j\}_{j=1}^{k}$:

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M}, \quad j = 1,2,\ldots,k. \tag{1.6}$$

Так, в предположении существования равенства

$$a_0 + a_1\, e + \ldots + a_k\, e^k = 0,$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – целые числа, из (1.6) следует, что

$$\left(a_0\, M + a_1\, M_1 + \ldots + a_k\, M_k\right) + \left(a_0\, \varepsilon + a_1\, M\varepsilon_1 + \ldots + a_k\, \varepsilon_k\right) = 0.$$

Последнее соотношение противоречит элементарным свойствам этих интегралов: M – целое отличное от нуля число, не делящееся на p при достаточно большом простом p; M_j – целые числа кратные p; ε_j убывают к нулю при $p \to +\infty$. Таково, в общих чертах, доказательство трансцендентности числа e, предложенное Эрмитом (см. [10]).

В 1882 году Линдеман, несколько усложнив рассуждения Эрмита, доказал трансцендентность числа π, решив тем самым одну из самых старых задач математики – «задачу о квадратуре круга». В основу предложенного им доказательства (см. [10]) легли элементарные свойства интегралов (1.5) и равенства

$$e^{\lambda_j}-\frac{P_{n_j}^j(1)}{Q_m(1)}=\frac{R_{n,m}^j(1)}{Q_m(1)},\ \ j=1,2,...,k,$$

где λ_j – различные алгебраические числа, а $P_{n_j}^j(z)$, $Q_m(z)$, $R_{n,m}^j(z)$ определены равенствами (1.5), если положить в них $n=m_1=m_2=...=m_k$.

Е.М. Никишин был один из первых, кто обратил внимание на важность дальнейшего изучения свойств интегралов (1.4), (1.5). В частности, им была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Её решение было получено А.И. Аптекаревым [9], который, найдя асимптотику поведения первого из интегралов в (1.5), показал, что при $n+m\to+\infty$ для любого $j=1,2,...,k$ $\pi_{n_j,m}^j(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходится равномерно на компактах комплексной плоскости к $e^{\lambda_j z}$. В частности, в [9] установлен следующий аналог леммы Перрона (см. [7]), доказывающей сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z: для любых n, m_j

$$\left|Q_m(z)-\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^r\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\right|\le\frac{\left|z\sum_{j=1}^r|\lambda_j|\right|^2}{n+m}\exp\left\{\left|z\sum_{j=1}^r|\lambda_j|\right|\right\},$$

где $Q_m(z)$ – знаменатель совместных аппроксимаций Паде к набору $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$. Из этого неравенства следует, что при $n+m\to+\infty$ для любого $|z|\le L$

$$Q_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^r\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\cdot\left\{1+O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right\}. \tag{1.7}$$

Здесь и далее L – положительная постоянная. Учитывая более современную терминологию (см., например, [5], [11]), в дальнейшем совместные аппроксимации Паде будем называть аппроксимациями Эрмита-Паде.

В данной работе изучаются асимптотические свойства интегралов Эрмита, определяющих в равенствах (1.5) функции $R_{n,m}^j(z)$. При $j=1,2,...,k$ найдены асимптотики эрмитовой аппроксимации системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ дробями $\pi_{kn,kn}^j(z;e^{j\xi})$. Аналогичные результаты установлены и для системы вырожденных гипергеометрических функций $\left\{F_\gamma^j(z)={}_1F_1(1,\gamma;jz)\right\}_{j=1}^k$.

Первый результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде к набору из двух марковских функций был получен В.А. Калягиным [12]. Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита-Паде для набора марковских функций, порожденных системой Анжелеско, были исследованы в фундаментальной работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [4]. Вопросы единственности, а также свойства главного члена асимптотики аппроксимаций Эрмита-Паде марковских функций для системы Никишина интенсивно исследовались рядом авторов (см. [14]−[16]). Отметим работы [5], [17]−[19] А.И. Аптекарева с соавторами (см. также обзор [11]), в которых рассматривались близкие задачи для различных совершенных систем функций.

Далее, полагаем

$$\phi(x)=x(x+1)\cdot...\cdot(x+k),$$
$$S(x)=\ln\left((-1)^i\phi(x)\right),\ \ x\in(-i,-i+1),$$
$$S(i)=-\infty,\ \ i=1,2,...,k.$$

Многочлен $\phi(x)$ имеет нули только в точках $0,-1,-2,...,-k$. Следовательно, на каждом из интервалов $(-1,0),(-2,-1),...,(-k,-k+1)$ производная $\phi'(x)$ обращается в ноль. Пусть $x_1,x_2,...,x_k$ – нули $\phi'(x)$, занумерованные в порядке убывания, т. е. $x_i\in(-i,-i+1)$, $i=1,2,...,k$. Так как $deg\,\phi'(x)=k$, то других нулей у многочлена $\phi'(x)$ нет. Нетрудно заметить, что на интервале $(-i,-i+1)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в точке x_i, т. е. $S(x)<S(x_i)$ при $x\in(-i,-i+1)$, $\{x_i\}$. На каждом из интервалов $(-i,-i+1)$

$$S'(x)=\frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

$$S''(x)=\frac{\phi''(x)\phi(x)-\left[\phi'(x)\right]^2}{\phi^2(x)}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-...-\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$S''(x_i)=\phi''(x_i)/\phi(x_i)<0.$$

Перейдем к формулировке основного результата настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть* $n=m_1=m_2=...=m_k$ *и* $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi})$ *– аппроксимации Эрмита-Паде для системы экспонент* $\left\{e^{jz}\right\}_{j=1}^{k}$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z|\le L$, *при* $n\to+\infty$

$$e^{jz}-\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi})=(-1)^{kn}\,\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}\,e^{(j+k/2)z}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{j}(-1)^{(i+1)n}\sqrt{-\frac{2\pi}{n\,S''(x_i)}}\;e^{nS(x_i)}\,e^{z\,x_i}\left(1+O_i(1/n)\right), \qquad (1.8)$$

где $j=1,2,...,k$.

В частности, при $k=1$

$$\phi(x)=x(x+1),\ \ S(x)=\ln[-x(x+1)],\quad x\in(-1,0),$$
$$x_1=-1/2,\ S(x_1)=-\ln 4,\ S''(x_1)=-8.$$

Поэтому

$$e^z-\pi^1_{n,n}(z;e^{\xi})=(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n)!}\,e^z\sqrt{\frac{\pi}{4n}}\,\frac{1}{4^n}\left(1+o(1)\right). \qquad (1.9)$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ называют эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\alpha_n/\beta_n\to1$ при $n\to+\infty$.

С помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n}}\,\frac{1}{4^n}.$$

Это означает, что асимптотические равенства (1.3) и (1.9) согласуются. Таким образом, при $n=m$ получили другое доказательство теоремы Д. Браесса [8].

Подробнее остановимся на случаях, когда $k=2,3$.

Следствие 1. *Пусть* $\{e^z,e^{2z}\}$ *– набор из двух экспонент и* $n=m_1=m_2$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z|\le L$, *при* $n\to+\infty$

$$e^z-\pi^1_{2n,2n}(z;e^{\xi})=\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}\,e^z\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt3}\right)^n e^{z/\sqrt3}\left(1+o(1)\right),$$

$$e^{2z}-\pi^2_{2n,2n}(z;e^{2\xi})= \qquad (1.10)$$

$$=\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}\,e^{2z}\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt3}\right)^n\left\{e^{z/\sqrt3}+(-1)^n e^{-z/\sqrt3}\right\}\left(1+o(1)\right).$$

Для доказательства равенств (1.10) достаточно заметить, что при $k=2$

$$\phi(x)=x(x+1)(x+2),\ x_1=-1+1/\sqrt{3},\ x_2=-1-1/\sqrt{3},$$
$$S(x_1)=S(x_2)=\ln\left[2/(3\sqrt{3})\right],\ S''(x_1)=S''(x_2)=-9.$$

Ранее другим методом аналогичные (1.10) равенства были получены в [20]. В них вместо б. м. $\sqrt{2\pi/9n}\cdot[2/(3\sqrt{3})]^n$ в качестве множителя правой части стоит эквивалентная ей б. м. $B((n+1)/2;n+1)$, где $B(\cdot;\cdot)$ – бета-функция Эйлера.

Следствие 2. *Пусть* $\{e^z,e^{2z},e^{3z}\}$ *– набор из трёх экспонент и* $n=m_1=m_2=m_3$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z|\le L$, *при* $n\to+\infty$

$$e^z-\pi^1_{3n,3n}(z;e^{\xi})=(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{(4n)!}\,e^z\sqrt{\frac{\pi}{5n}}\,e^{\sqrt{5}z/2}\left(1+o(1)\right),$$
$$e^{2z}-\pi^2_{3n,3n}(z;e^{2\xi})=(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{(4n)!}\,e^{2z}\sqrt{\frac{\pi}{5n}}\,e^{\sqrt{5}z/2}\left(1+o(1)\right), \qquad (1.11)$$
$$e^{3z}-\pi^3_{3n,3n}(z;e^{3\xi})=(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{(4n)!}\,e^{3z}\sqrt{\frac{\pi}{5n}}\left\{e^{\sqrt{5}z/2}+e^{-\sqrt{5}z/2}\right\}\left(1+o(1)\right).$$

Для доказательства равенств (1.11) достаточно заметить, что при $k=3$

$$\phi(x)=x(x+1)(x+2)(x+3),\ x_1=(-3+\sqrt{5})/2,\ x_3=(-3-\sqrt{5})/2,$$
$$x_2=-3/2,\ S(x_1)=S(x_3)=0,\ S(x_2)=\ln(9/16),$$
$$S''(x_1)=S''(x_3)=-10,\ S''(x_2)=-80/9.$$

При исследовании асимптотики интегралов Эрмита (1.5) применяем метод Лапласа (см., например, [21]). В §2 приводятся необходимые сведения об интегралах Лапласа, доказывается основная теорема 1. В §3 получено обобщение теоремы 1. Здесь рассматриваются аппроксимации Эрмита-Паде системы вырожденных гипергеометрических функций.

Доказательство теоремы 1

Интегралы вида

$$F(\lambda)=\int_I f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \qquad (2.1)$$

называют интегралами Лапласа. Здесь I – либо отрезок $[a,b]$, либо интервал (a,b), λ – большой параметр. Будем считать, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Считаем также, что $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны при $x\in I$. Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$.

Следующее утверждение (см. [21], §43, п. 1, лемма 1) дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

Утверждение 1. *Пусть* $I=(a,b)$ *– конечный или бесконечный интервал,* $S(x)\le c$ *при* $x\in I$ *и интеграл (2.1) сходится абсолютно при некотором* $\lambda_0>0$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\lambda\ge\lambda_0$

$$\left|F(\lambda)\right|\le c_1\,e^{c\,\mathrm{Re}\,\lambda},$$

где c_1 *– положительная постоянная.*

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I=[a,b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо (см. [21], §43, п. 4, теорема 2) следующее

Утверждение 2. *Пусть* $S(x)<S(x_0)$, $x\ne x_0$, $a<x_0<b$, $S''(x_0)\ne 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $\lambda\to+\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$F(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}}\;e^{\lambda S(x_0)}\left\{f(x_0)+O(\lambda^{-1})\right\}. \qquad (2.2)$$

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть* $n=m_1=m_2=...=m_k$ *и* $R^j_{n,m}(z)$ *– функции, определяемые равенствами (1.5) для системы экспонент* $\left\{e^{jz}\right\}_{j=1}^{k}$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z|\le L$, *при* $n\to+\infty$

$$R^j_{n,m}(z)=(-1)^{kn}\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}\,e^{jz}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{j}(-1)^{(i+1)n}\sqrt{-\frac{2\pi}{n\,S''(x_i)}}\;e^{nS(x_i)}\,e^{z\,x_i}\left(1+O_i(1/n)\right), \qquad (2.3)$$

где $j=1,2,...,k$.

Доказательство. В условиях теоремы

$$R^j_{n,kn}(z)=\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}\,e^{jz}\int_0^j x^n(x-1)^n\cdot...\cdot(x-k)^n e^{-zx}dx. \qquad (2.4)$$

Интеграл в правой части равенства (2.4) обозначим через $I_j(z)$ и представим в виде

$$I_j(z)=\sum_{i=1}^{j}I^i_j(z),\ \text{ãäå}\quad I^i_j(z)=\int_{i-1}^{i}x^n(x-1)^n\cdot...\cdot(x-k)^n e^{-zx}dx. \qquad (2.5)$$

В $I^i_j(z)$ заменим переменную интегрирования x на $-x$. Тогда

$$I^i_j(z)=(-1)^{kn+(i+1)n}\int_{-i}^{-i+1}e^{zx}e^{n\ln[(-1)^i x(x+1)\cdot...\cdot(x+k)]}dx=$$

$$=(-1)^{kn+(i+1)n}\int_{-i}^{-i+1}e^{zx}e^{nS(x)}dx.$$

В последнем интеграле разобьем область интегрирования $(-i,-i+1)$ на три части: $(-i,-i+\tau]$, $[-i+\tau,-i+1-\tau]$, $[-i+1-\tau,-i+1)$, где $0<\tau<1$ и выбрано так, чтобы $x_i\in[-i+\tau,-i+1-\tau]$. Поскольку на интервале $(-i,-i+1)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в единственной точке x_i, то, в силу утверждения 1, несобственные интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_i)}$. Асимптотика интеграла по отрезку $[-i+\tau,-i+1-\tau]$ вычисляется по формуле (2.2), если положить в ней $f(x)=e^{zx}$. Поэтому при $n\to+\infty$

$$I^i_j(z)=(-1)^{kn+(i+1)n}\sqrt{-\frac{2\pi n}{S''(x_i)}}\;e^{nS(x_i)}\,e^{z\,x_i}\left(1+O_i(1/n)\right).$$

Отсюда и из равенств (2.4), (2.5) следуют равенства (2.3). Лемма 1 доказана.

Легко заметить, что утверждения (1.8) теоремы 1 вытекают из (2.3). Для этого достаточно учесть, что при $n=m_1=m_2=...=m_k$, $\lambda_j=j$, $j=1,2,...,k$ из неравенства А.И. Аптекарева (см. (1.7)) при $n\to+\infty$ следует

$$Q_m(z)=e^{-kz/2}\left(1+O(1/n)\right).$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание 1. В общем случае, когда λ_j – отличные от нуля действительные числа и $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_k$, асимптотика диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{\lambda_j\xi})$, $j=1,2,...,k$ находится аналогичным образом. Нужно только положить

$$\phi(x)=x(x+\lambda_1)\cdot...\cdot(x+\lambda_k)$$

и соответствующим образом переопределить функцию $S(x)$. Как и прежде, x_1, x_2,..., x_k – нули $\phi'(x)$. Выбор чисел $\lambda_j=j$ в теореме 1 обусловлен, прежде всего, связью с классической постановкой и простотой формулировок следствий.

Замечание 2. Теорема 1, как и её обобщения, позволяют в некоторых случаях получать эффективные оценки для совместных приближений рациональными числами значений показательной функции $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_k}$. В этом смысле полученные результаты могут быть полезными в теории диофантовых приближений (см., например, [23]).

Эрмитова аппроксимация вырожденных гипергеометрических функций

Рассмотрим систему вырожденных гипергеометрических функций (функций Миттаг-Леффлера) $\left\{F_\gamma^j(z) = {}_1F_1(1,\gamma; jz)\right\}_{j=1}^k$, где

$$ {}_1F_1(1,\gamma; jz) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j = 1, 2, \dots, k; $$

$(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$, а $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

А.И. Аптекаревым [22] установлено, что эта система функций является совершенной (при $\gamma = 1$ она совпадает с системой экспонент $\left\{e^{jz}\right\}$) и при фиксированных n и m_J таких, что $n \ge m_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$, общий знаменатель $Q_m(z)$ и остаток $R_{n,m}^j(z)$ в случае, когда $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$, имеют вид:

$$ \begin{aligned} Q_m(z) &= \frac{z^{kn+n+\gamma}}{\Gamma(kn+n+\gamma)} \int_0^{\infty} [x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^{k} (x-i)^n] e^{-zx} dx, \\ R_{n,m}^j(z) &= \frac{e^{jz} z^{kn+n+1}}{j^{\gamma-1} (\gamma)_{kn+n}} \int_0^{j} [x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^{k} (x-i)^n] e^{-zx} dx, \end{aligned} \tag{3.1} $$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, а интегралы имеют тот же смысл, что и в формулах (1.5). В [22] также доказано, что при $|z| \le L$ и $n \to +\infty$

$$ Q_m(z) = \exp\left\{ -\frac{kn(k+1)/2}{kn+n+\gamma-1} z \right\} \cdot \left(1 + O(1/n)\right). \tag{3.2} $$

В случае, когда $k = 1$, а γ принимает действительные значения, асимптотические свойства аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$ функций $F_\gamma(z) = F_\gamma^1(z) = {}_1F_1(1,\gamma; z)$ изучались в [24]. В этой работе, в частности, установлен следующий аналог равенства Д. Браесса (1.3): для любого комплексного z, $|z| \le L$, при $m \le n$ и $n + m \to \infty$

$$ F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = (-1)^m \frac{m!\,(\gamma)_n\; e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}\; (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} \;\; (1 + o(1)). \tag{3.3} $$

Доказательство следующей теоремы существенно не отличается от доказательства теоремы 1. В его заключительной части необходимо вместо (1.7) воспользоваться соотношением (3.2).

Теорема 2. *Пусть* $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ *и* $\pi_{n_j,m}^j(z) = \pi_{kn,kn}^j(z; F_\gamma^j)$ *– аппроксимации Эрмита-Паде для системы* $\left\{F_\gamma^j(z)\right\}_{j=1}^k$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$, *при* $n \to +\infty$

$$ F_\gamma^j(z) - \pi_{n_j,m}^j(z) = (-1)^{kn} \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{(j+k/2)z} \times $$

$$ \times \sum_{i=1}^{j} (-1)^{(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} \; e^{nS(x_i)} \, e^{z x_i} \, (-jx_i)^{\gamma-1} \left(1 + O_i(1/n)\right), \tag{3.4} $$

где $j = 1, 2, \dots, k$, $(-jx_i)^{\gamma-1} = e^{(\gamma-1)\ln(-jx_i)}$, $\ln 1 = 0$.

В частности, при $k = 1$, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ из теоремы 2 следует, что для любого комплексного z, $|z| \le L$ и $n \to +\infty$

$$F_\gamma(z)-\pi_{n,n}(z;F_\gamma)=(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}}\,e^z\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\big(1+O(1/n)\big). \qquad (3.5)$$

Применяя при действительных значениях $\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ формулу Стирлинга и учитывая равенство $(\gamma)_k=\Gamma(k+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, нетрудно показать, что

$$\frac{n!\,(\gamma)_n}{(\gamma)_{2n+1}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\ .$$

Это значит, что при $n=m$ и $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ асимптотические равенства (3.3) и (3.5) согласуются. Таким образом, в диагональном случае получено другое доказательство теоремы 1 из [24], которое, к тому же, справедливо и в случае комплексных $\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$. Из теоремы 2 легко получить аналоги следствий 1 и 2 для систем, состоящих из двух и трех вырожденных гипергеометрических функций.

Замечание 3. Как и в случае системы экспонент, достаточно просто получить аналог теоремы 2 для системы $\left\{F_\gamma^j(\lambda_j z)={}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\right\}_{j=1}^k$ вырожденных гипергеометрических функций, где $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k$ – отличные от нуля действительные числа.

Литература

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988. − 256 с.

2. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. − 502 с.

3. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Compositio mathematica. − 1968. − Vol. 19, № 2. – P. 95−166.

4. Гончар, А.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Тр. МИАН СССР. − 1981. − Т. 157. − С. 31–48.

5. Аптекарев, А.И. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // Матем. сборник. − 2010. − Т. 201, № 2. − С. 29−78.

6. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). − 1873. − Vol. 77. − P. 18–293.

7. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. − Leipzig-Berlin : Teubner, 1929. − 322 p.

8. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z / D. Braess // J. Approx. Theory. − 1984. − Vol. 40, № 4. – P. 375−379.

9. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. − 1981. − № 1. − С. 68−74.

10. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2-х т. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Ф. Клейн. − М. : Наука, 1987. − 324 с.

11. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. − 2011. − Т. 66, № 6(402). – С. 37−122.

12. Калягин, В.А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности / В.А. Калягин // Матем. сборник. − 1979. − Т. 110(152), № 4. – С. 609−627.

13. Никишин, Е.М. Совместные аппроксимации Паде / Е.М. Никишин // Матем. сборник. − 1980. − Т. 113(155), № 4. – С. 499−519.

14. Гончар, А.А. Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, В.Н. Сорокин // Матем. сборник. – 1997. – Т. 188, № 5. – С. 33–58.

15. Driver, K. Simultaneus rational approximants to Nikishin systems. I / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 60. – P. 245–263.

16. Driver, K. Simultaneus rational approximants to Nikishin systems. II / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 61. – P. 261–284.

17. Аптекарев, А.И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для системы Никишина / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, № 5. – С. 3–44.

18. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.

19. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Эрмита-Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6(402). – С. 123–190.

20. Рябченко, Н.В. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 97–100.

21. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. − 389 с.

22. Аптекарев, А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\left\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \right\}_{i=1}^{k}$ / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. − 1981. − № 2. – С. 58−62.

23. Шмидт, В. Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983. − 345 с.

24. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 04.09.12