

В. Я. РИВКИНД

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ КАПЛИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 16 XII 1975)

Впервые задача о стационарном движении капли в вязкой несжимаемой жидкости была рассмотрена Адамаром и Рыбчинским ⁽¹⁾, которые показали, что если в качестве уравнений движения взять уравнения Стокса, то решением задачи является сферическая капля радиуса a , причем a связано со значениями кинематической вязкости ν_1 внутри и ν_2 вне капли, плотностей ρ_1 внутри и ρ_2 вне капли со скоростью u_∞' капли как целого соотношением

$$u_\infty' = \frac{2a^2 g (\rho_1 - \rho_2) (\nu_2 \rho_2 + \nu_1 \rho_1)}{3\nu_2 \rho_2 (2\nu_2 \rho_2 + 3\nu_1 \rho_1)} \quad (1)$$

(g — ускорение силы тяжести).

В настоящей работе исследуются вопросы существования, единственности и гладкости решения задачи о стационарном движении вязкой несжимаемой капли в потоке вязкой несжимаемой жидкости, когда в качестве основных уравнений движения берется полная нелинейная система Навье — Стокса. Если взять систему координат, в которой капля как целое покоится, и выбрать в качестве безразмерных переменных координаты $x = x'/a$; скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}'a/\nu_1^2$; давление $p_i = p'_i a (\rho_1 \nu_1^2)$ (x' , $\mathbf{u}'$, p' — соответствующие размерные величины, причем индексом $i=1$ обозначены значения внутри капли, а $i=2$ вне ее), то уравнения движения примут вид:

внутри капли ($x \in \Omega_1$)

$$(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla \left(p_1 + \frac{ga^3 x_1}{\nu_1^2} \right) = 0; \quad (2)$$

вне ее ($x \in \Omega_2 = R^3 \setminus \overline{\Omega_1}$, R^3 — трехмерное евклидово пространство)

$$\kappa(\mathbf{u}, 0) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \kappa \nabla \left(p_2 + \frac{ga^3 x_1}{\nu_1^2} \right) = 0, \quad \kappa = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \kappa \frac{\nu_2}{\nu_1}. \quad (3)$$

К ним присоединяется уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

На замкнутой границе капли Γ должны выполняться условия: неразрывности касательных составляющих скоростей и непротекания

$$[\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}]|_\Gamma = 0; \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0; \quad (6)$$

равенства нулю разности касательных напряжений

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]|_\Gamma = 0 \quad (7)$$

и равенство скачка нормальных напряжений капиллярному давлению

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]|_\Gamma = -We^{-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \beta x_1 \mathbf{i}_n \right). \quad (8)$$

При удалении от капли поток устанавливается, т. е.

$$\mathbf{u}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{u_{\infty}' a}{v_1} \mathbf{i}. \quad (9)$$

В (2) — (9) через $\mathbf{i}$ обозначен орт по оси x_1 , $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы, касательный и нормальный к Γ ($\mathbf{n}$ направлен внутрь Ω_1), σ — тензор, полученный из тензора напряжений, а именно:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -q_1 \delta_{ij} + 2e_{ij}, & x \in \Omega_1, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ -\kappa q_2 \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, & x \in \Omega_2, \quad q_i = p_i + g a^3 x_i / v_1^2, \end{cases} \quad (10)$$

$$R_k = a R_k', R_k' - \text{радиусы главных кривизин к } \Gamma, \text{ число Вебера } We = \frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma a};$$

$$\beta = \frac{a^2 \rho_1 g (\kappa - 1)}{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad - \text{коэффициент поверхностного натяжения, } [q] =$$

$= q_1 - q_2$, где q_1 и q_2 — предельные значения функции q на Γ при стремлении к Γ изнутри и извне капли.

Подлежит определению форма капли — поверхность Γ и скорости и давления внутри и вне капли.

Исследование данной задачи, подобно задачам со свободной границей в идеальной и вязкой жидкости ((², ³) и др.) разбивается на две части. Сначала исследуется вспомогательная задача, в которой граница Γ известна ($\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $\alpha > 0$), уравнение (8) отбрасывается, а в правых частях равенств (2) — (6) ноль заменяется соответственно на функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $\varphi^{(1)}$,

$\varphi^{(2)} = (\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})$, $\varphi^{(3)}(x)$. После рассмотрения этой задачи, используя условия (8), доказывается существование и гладкость основной задачи.

Л е м м а 1. Пусть $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $f^{(i)} \in C^\alpha(\Omega_i)$, $\varphi^{(1)} \in C^{1+\alpha}(\Omega_i)$, $\varphi^{(2)} \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$, $\varphi^{(3)} \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$, $\varphi^{(i)} \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $i=1, 2$; $\alpha > 0$; функции $f^{(i)}$ и $\varphi^{(1)}$ обращаются в ноль вне шара K_{r_0} достаточно большого радиуса $r_0 > 1$ ($\Omega_i \subset K_{r_0}$) и

$$\int_{\Omega_i} \varphi^{(1)} dx = \int_{\Gamma} \varphi^{(3)} dx, \quad i=1, 2. \quad (11)$$

Пусть, кроме того,

$$I = C_1 \left| \frac{g a^3}{v_1^2} |\kappa - 1| + \sum_{m=1}^2 B^m + F \right| < 1, \quad (12)$$

где

$$(13)$$

$$F = \sum_{i=1}^2 \{ |f^{(i)}|_{\alpha, \Omega_i} + |\varphi^{(1)}|_{1+\alpha, \Omega_i} \} + |\varphi^{(2)}|_{2+\alpha, \Gamma} + |\varphi^{(3)}|_{2+\alpha, \Gamma} + |\varphi^{(i)}|_{1+\alpha, \Gamma};$$

$$B = \frac{g a^3}{3 v_2 v_1} \frac{\mu + 1}{2\mu + 3}; \quad (14)$$

$c_1 = \text{const}$ определяется константами из теорем вложения, $|\varphi|_{1+\alpha, \Omega_i}$ — норма в пространстве Гёльдера $C^{1+\alpha}(\Omega_i)$.

Тогда решение вспомогательной задачи $\mathbf{u}(x)$, $\nabla p(x)$ существует, единственно, причем $\mathbf{u} \in C(R^3)$, $\mathbf{u} \in C^{2+\alpha}(\Omega_i)$, $\nabla p \in C^{1+\alpha}(\Omega_i)$, $i=1, 2$, и справедливы неравенства

$$(15)$$

$$\sum_{i=1}^2 (|\mathbf{u}|_{2+\alpha, \Omega_i} + |\nabla p|_{1+\alpha, \Omega_i}) + \max_{R^3} |\mathbf{u}| \leq c_2 \left(\frac{g a^3}{v_1^2} |\kappa - 1| + F + \sum_{m=2}^8 B^m \right),$$

где постоянная c_2 зависит лишь от константы в теоремах вложения, величины r_0 и оценок для $\Gamma \in C^{3+\alpha}$. Скорость $u(x)$ при удалении от капли стремится к предельному значению u_∞ и при этом

$$u = u_\infty + \Phi \cdot H(x) + o(|x|^{-3/2+\epsilon}) = u_\infty + o(|x|^{-1}), \quad (16)$$

где $H(x)$ — тензор, связанный с линеаризованной по Озеену системой (2) — (4), (9), Φ — сила, с которой поток действует на каплю.

Доказательство теоремы проводится в несколько этапов. Сначала аналогично ^(4, 5) доказываются существование обобщенного решения задачи. Далее, следуя ⁽⁴⁾, устанавливается его гладкость в строго ограниченных подобластях $\Omega_i' \subset \Omega_i$. Это позволяет, фиксируя значение решения на сфере S_{r_0} , рассмотреть задачу как задачу на обтекание шара, откуда следует, согласно ⁽⁶⁾, справедливость асимптотики вида (16). Суммируемость с квадратом производных второго порядка вблизи поверхности Γ доказывается аналогично ^(5, 6). Кроме того показывается, что при выполнении условий (12) решение единственно. Дальнейшее исследование гладкости и получение априорных оценок (15) основывается на том, что линеаризованная система Навье — Стокса (2) — (3), (4) является эллиптической по Дуглису — Ниренбергу ⁽⁸⁾, а условия (5) — (7); как следует из непосредственной проверки, удовлетворяют условию дополненности ⁽⁷⁾. Это позволяет установить нужные оценки для линеаризованной вспомогательной задачи. Далее, присоединяя в уравнениях Навье — Стокса нелинейные члены к массовым силам и рассматривая систему как линейную с новыми массовыми силами, путем последовательного использования гладкости решений линеаризованной задачи и соответствующих теорем вложения, устанавливается необходимая гладкость решения всей нелинейной задачи и оценки (15).

После рассмотрения вспомогательной задачи решение основной задачи можно свести к исследованию разрешимости уравнения (8). Давление во вспомогательной задаче определяется с точностью до постоянной. При рассмотрении основной задачи фиксируем его, полагая значение в начале координат равным значению давления в центре капли в задаче Адамара — Рыбчинского и $q \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Рассмотрим уравнение (8). Перепишем его в виде

$$R_1 + R_2 - 2 + \beta x_i n_i|_\Gamma = 2 + [n \cdot \sigma \cdot n]|_\Gamma \cdot We + \sum_{i=1}^2 (R_i - 1)^2 \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(R_i t + (1-t))^3} dt.$$

Введем сферическую систему координат r, θ, φ и учтем, что уравнения (2) — (9) осесимметричны, т. е. не зависят от угла φ . Далее, обозначив $\xi(\theta) = r(\theta) - 1$, где $r = r(\theta)$ — уравнение поверхности Γ , $p^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ — давление и тензор (10), соответствующий решению Адамара — Рыбчинского, $n^{(0)}$ — единичный орт радиуса-вектора, исходящего из начала координат, преобразуем уравнение к виду

$$L_\beta \xi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\xi}{d\theta} + 2\xi - \beta \xi \cos \theta = We ([n \cdot \sigma \cdot n] - [n^{(0)} \cdot \sigma^{(0)} \cdot n^{(0)}]) + \psi(\xi), \quad (17)$$

где через $\psi(\xi)$ обозначены члены выше первого порядка малости по ξ . Число $\lambda = 0$ является простым собственным числом оператора L_0 ; для L_β с малым β ему соответствует простое собственное число λ_β , являющееся аналитической функцией β , имеющей вид ⁽¹⁰⁾ $\lambda_\beta \sim c\beta^2 + o(\beta^3)$, $c = \text{const} \neq 0$.

Обратив L_β , получим

$$\xi = L_\beta^{-1} \{We ([n \cdot \sigma \cdot n] - [n^{(0)} \cdot \sigma^{(0)} \cdot n^{(0)}]) + \psi(\xi)\} = L_\beta^{-1} A \xi. \quad (18)$$

Далее доказывается, что при выполнении условий

$$c_3 \operatorname{We} \frac{1}{\beta^2} J < 1; \quad J = \frac{ga^3}{v_1^2} |\kappa - 1| + \sum_{m=1}^8 B^m; \quad (19)$$

$$0 < \beta < 1; \quad (20)$$

$$c_4 \left(\frac{ga^3}{v_1^2} |\kappa - 1| + B^4 \right) < 1 \quad (21)$$

уравнение (18) имеет единственное решение в некотором шаре D_δ пространства $C^{3+\alpha}$ радиуса δ , где $\delta > 0$ — достаточно малая величина. При доказательстве используются свойства и априорные оценки для вспомогательной задачи, устанавливаемые леммой 1. Таким образом, выводится

Теорема. Пусть выполнены условия (19) — (21); тогда задача (2) — (9) с постоянными на давления, определенными выше, имеет единственное решение, причем

$$u(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega_i) \cap C(R^3), \quad p(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega_i), \quad \Gamma \in C^{3+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

и для $u(x)$ справедлива асимптотика (16) при $x \rightarrow \infty$.

Для уменьшения громоздкости изложения все рассуждения здесь велись в предположении отсутствия массовых сил (кроме силы тяжести) и однородных краевых условий. Однако доказанная теорема непосредственно обобщается и на случай наличия других массовых сил $\mathbf{f}$ и неоднородности в уравнениях (4) — (8). Для этого достаточно, чтобы выполнялись требования (11) — (14), а в выражениях (19) — (21) вместо J стояла величина I из (12).

Автор выражает благодарность О. А. Ладыженской за внимание к настоящей работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹² Г. Ламб, Гидродинамика, М. — Л., Гостехиздат, 1947. ² В. В. Пузырев, Прикл. матем. и технич. физ., № 3, 91 (1972). ³ Г. В. Щербина, Сб.: Математическая физика и функциональный анализ, в. 1, Харьков, 1969, стр. 49. ⁴ О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., «Наука», 1970. ⁵ В. А. Солонников, В. Е. Шадилов, Тр. Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 125, 196 (1973). ⁶ В. Я. Ривкин, Н. Б. Фридман, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38, 137 (1973). ⁷ К. И. Бабенко, Матем. сб., т. 91 (133), № 1 (1973). ⁸ В. А. Солонников, Тр. Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 92, 233 (1966). ⁹ З. Г. Шефтель, Укр. матем. журн., т. 18, № 3, 132 (1966). ¹⁰ К. Фридрихс, Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1969.