

УДК 517.946.51

МАТЕМАТИКА

Б. Ю. СТЕРНИН, В. Е. ШАТАЛОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМ ГАМИЛЬТониАНОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 XI 1975)

Цель этой заметки — получить асимптотику решения задачи Коши

$$-ih \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, t, x \right) \psi = 0 \pmod{h^N}. \quad (1)$$

$$\psi|_{t=0} = K_0 \varphi_0;$$

здесь K_0 — канонический оператор на правильном s -аналитическом лагранжевом многообразии $[M_0, \rho_{M_0}]$ с мерой μ (см. ниже), H — комплекснозначный гамильтониан, $\text{Im } H \geq 0$.

Комплексная теория канонического оператора и ее приложения изучались в ⁽²⁻¹²⁾. В частности, в ⁽⁸⁾ решается задача Коши для уравнения (1) в предположении, что на M_0 некоторая форма замкнута. Как заметил А. С. Мищенко, это условие не является существенным (см. лемму 1).

1°. Сформулируем основные положения комплексной теории канонического оператора Маслова ⁽⁸⁾.

Определение 1. s -Аналитическим называется гладкое многообразие M , $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$, вместе с таким атласом $\{U_j, \alpha_j\}$, $\alpha_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$, что в $U_i \cap U_j$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{\alpha}_j} = 0 \pmod{sI(M, \rho_M)};$$

здесь ρ_M (весовая функция) — неотрицательная функция на M , $\rho_M^2 \in C^\infty(M)$, $sI(M, \rho_M)$ — множество функций, для которых $|D^s f| \leq C \rho_M^{s-|s|}$, $|s| \leq s$, и все рассуждения проводятся в некоторой окрестности множества $\Omega = \{\alpha \in M | \rho_M(\alpha) = 0\}$.

Вводятся понятия s -аналитических функций, вложений, форм и векторных полей на M (см. ⁽⁸⁾).

Пусть $\Phi = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}_n$ — $2n$ -мерное s -аналитическое гамильтоново (симплектическое) пространство с координатами $(z^1, \dots, z^n, \xi_1, \dots, \xi_n) = (z, \xi)$, весовой функцией $\rho_\Phi = \{| \text{Im } z |^2 + | \text{Im } \xi |^2\}^{1/2}$ и структурной формой

$$dz \wedge d\xi = dz^1 \wedge d\xi_1 + \dots + dz^n \wedge d\xi_n.$$

Определение 2. $(s+1)$ -Аналитическое вложение $i: (M, \rho_M) \rightarrow (\Phi, \rho_\Phi)$ лагранжево, если $i^*(dz \wedge d\xi) = 0 \pmod{sI(M, \rho_M)}$.

На $(s+1)$ -аналитическом лагранжевом многообразии существует атлас $\{U_i\}$ канонических карт с координатами

$$(z^I, \xi_I) = (z^{i_1}, \dots, z^{i_k}, \xi_{i_{k+1}}, \dots, \xi_{i_n}), \quad \{i_1, \dots, i_k\} = I,$$

$$\{i_{k+1}, \dots, i_n\} = \bar{I}, \quad I \cap \bar{I} = \emptyset, \quad I \cup \bar{I} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Определение 3. $(s+1)$ -Аналитическое лагранжево многообразие с $(s+1)$ -аналитической невырожденной мерой μ называется правильным квантованным, если:

А) Существует такая $(s+1)$ -аналитическая коцепь $\{S_I\}$ и вещественная коцепь $\{\arg \mu_I\}$ канонического покрытия $\{U_I\}$, что

$$1) dS_I = i^*(\xi_I dz_I - z_I^* d\xi_I) \pmod{{}^s I(M, \rho_M)} \text{ в } U_I,$$

$$S_J - S_I = i^*(z^{I_3} \xi_{I_3} - z^{I_2} \xi_{I_2}) \pmod{{}^s I(M, \rho_M)} \text{ в } U_I \cap U_J;$$

2) $\arg \mu_I$ — одно из значений аргумента функции $\mu_I = \partial \mu / \partial (z^I, \xi_I)$ и

$$\arg \mu_I - \arg \mu_J = \sum \arg \lambda_k + |I_2| \pi \text{ в } \Omega \cap U_I \cap U_J. \quad (2)$$

Здесь $I_2 = I \setminus \{I \cap J\}$, $I_3 = J \setminus \{I \cap J\}$, λ_k — собственные значения матрицы $\text{Hess}_{z^{I_2}, \xi_{I_2}}(-S_I(\alpha))$, $\alpha \in \Omega$,
 $-\pi/2 < \arg \lambda_k \leq \pi/2$.

Б) В каждой канонической карте U_I имеют место неравенства

$$C_1 \rho^2(x^I, p_I) \leq \text{Im } S_I(x^I, p_I) \leq C_2 \rho^2(x^I, p_I); \quad C_1, C_2 > 0.$$

Предложение 1. Условия А), Б) не зависят от выбора канонического атласа карт.

В дальнейшем термин «многообразие» означает правильное $(s+1)$ -аналитическое лагранжево квантованное вложение.

Условие (2) может быть выражено в дифференциально-геометрических терминах. Пусть σ — невырожденная мера на (M, ρ_M) ,

$$\sigma = i^* d(z - i\xi) = i^* d(z^1 - i\xi_1) \wedge \dots \wedge d(z^n - i\xi_n).$$

Теорема 1. Условия (2) выполнены, если и только если отображение $\sigma/\mu: M \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ гомотопно постоянному.

Замечание 1. Первоначальное доказательство теоремы 1, принадлежащее Б. Ю. Стернину, было основано на детальном изучении топологии комплексного лагранжева грассманиана, проведенном А. С. Мищенко (см. (8)). В настоящее время имеется прямое доказательство, свободное от использования универсальной модели (Б. Ю. Стернин).

Пусть ${}^s \mathcal{O}'(M, \rho_M)$ — кольцо s -аналитических функций на (M, ρ_M) , ${}^s \mathcal{O}(M, \rho_M)$ — фактор-кольцо,

$${}^s \mathcal{O}(M, \rho_M) = {}^s \mathcal{O}'(M, \rho_M) / {}^s I(M, \rho_M) \cap {}^s \mathcal{O}'(M, \rho_M).$$

Рассмотрим кольцо многочленов от переменной h вида

$$f_0 + h f_1 + \dots + h^k f_k, \quad (3)$$

причем $f_j \in {}^t \mathcal{O}'(M, \rho_M)$, $t_j \geq \max\{0, s-2j\}$. В нем многочлены $\sum_{h \geq s} h^k g_k$ образуют идеал, и пусть ${}^s \mathcal{O}'[h](M, \rho_M)$ — фактор-кольцо по этому идеалу. Пусть ${}^s I[h](M, \rho_M)$ — идеал, порожденный многочленами вида (3), для которых $f_j \in {}^{s-2j} I(M, \rho_M)$. Пусть ${}^s \mathcal{O}[h](M, \rho_M)$ — фактор-кольцо ${}^s \mathcal{O}'[h](M, \rho_M)$ по этому идеалу.

Зафиксируем $\{S_I\}$ и $\{\arg \mu_I\}$ и определим элементарную каноническую коцепь покрытия $\{U_I\}$, полагая для $\varphi \in {}^s \mathcal{O}_0(U_I)$ (элементы с компактным носителем)

$$k_I \varphi = F_{p_I \rightarrow x_I} \left[\exp \left(\frac{i}{h} S_I \right) \overline{V_{\mu_I}} \right] (x^I, p_I).$$

Определяются «операторы склейки» V_{IJ} в пересечении $U_I \cap U_J$, удовлетворяющем в пространстве

$${}^{s/2-1} H^{1/h}(\mathbb{R}^n) = \lim_{h \rightarrow 0} H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n) \pmod{h^{s/2-1}}$$

равенству

$$k_I \varphi = k_J V_{IJ} \varphi$$

(здесь $H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$ — $(1/h)$ -пространство С. Л. Соболева порядка k (4, 8)).

Кольцо ${}^s\mathcal{O}'[h](M, \rho_M)$ индуцирует пучок ${}^s\mathcal{O}'[h](M, \rho_M)$ ростков s -аналитических полиномов по h на M : мы обозначим через $\mathcal{F}$ пучок, построенный из пучка ${}^s\mathcal{O}'[h](M, \rho_M)$ с помощью V_{IJ} .

Таким образом, существуют такие изоморфизмы

$$\psi_I: {}^s\mathcal{O}'[h](U_I) \rightarrow {}^s\mathcal{O}'[h]|_{U_I},$$

что

$$V_{IJ} = \psi_J^{-1} \circ \psi_I.$$

Теорема 2. Существует единственный оператор

$$\mathcal{K}: \Gamma(M, \mathcal{F}) \rightarrow {}^{s-1/2}H^{1/h}(\mathbf{R}^n)$$

такой, что для любого сечения s с компактным носителем $\varphi \in \Gamma_0(U_I, \mathcal{F})$

$$\mathcal{K}(\varphi) = k_I(\psi_I^{-1}\varphi).$$

Можно построить некоторый оператор

$$K: {}^s\mathcal{O}[h](M, \rho_M) \rightarrow {}^{s-1/2}H^{1/h}(\mathbf{R}^n),$$

действующий уже в пространстве ${}^s\mathcal{O}(M, \rho_M)$ и совпадающий в главном с оператором $\mathcal{K}$.

Определение 4. Многообразие (M, ρ_M) с мерой μ ассоциировано с гамильтонианом H , если

$$i^*H=0, \quad \mathcal{L}_{V(H)}\mu=0 \pmod{{}^sI(M, \rho_M)};$$

здесь $H=H(z, \xi) = \sum_{k=0}^{s+1} \frac{1}{k!} \left(iy \frac{\partial}{\partial x} + i\eta \frac{\partial}{\partial p} \right)^k H(x, p)$, $z=x+iy$, $\xi=p+i\eta$,

$V(H) = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{\partial H}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, $\mathcal{L}_{V(H)}$ — производная Ли вдоль поля $V(H)$.

Теорема 3. Если многообразие (M, ρ_M) с мерой μ ассоциировано с H , то для оператора K справедливо сравнение

$$H\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}, x\right)K\varphi \equiv -ihK\mathcal{P}\varphi \pmod{h^{s/2-1}},$$

где

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + h\mathcal{P}_1 + \dots + h^{[s/2-1]}\mathcal{P}_{[s/2-1]};$$

для операторов $\mathcal{P}_j$, $j=0, 1, \dots, [s/2-1]$, предъясняются явные формулы, в частности,

$$\mathcal{P}_0 = V(H) - {}^{1/2} \frac{\partial^2 H}{\partial z^i \partial \xi_i}.$$

2°. Вернемся теперь к решению задачи (1).

Теорема 4. Пусть M_0 — многообразие в $\Phi = \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}_n$, H — гамильтониан, K_0 — канонический оператор на $[M_0, \mu_0]$. Тогда:

1) в пространстве $\Phi' = \mathbf{C}^{n+1} \oplus \mathbf{C}_{n+1}$ с координатами (z, τ, ξ, E) , структурной формой $dz \wedge d\xi + d\tau \wedge dE$ и весовой функцией $\rho_{\Phi'} = \{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \tau)^2 + (\operatorname{Im} E)^2\}^{1/2}$ существует такое многообразие M с мерой μ , ассоциированное с H , что

$$M \cap \{\tau=0\} = \{(\alpha, E) \mid \alpha \in M_0, E = -H(\alpha)\};$$

2) на многообразии M существует такой канонический оператор K , что

$$K\varphi|_{\tau=0} = K_0(\varphi|_{\tau=0}).$$

При этом решение задачи (1) может быть представлено в форме $\psi(x, t, h) = K\varphi$, где φ — решение задачи Коши для уравнения переноса $\mathcal{P}\varphi=0$, $\varphi|_{\tau=0} = \varphi_0$.

Доказательство этого утверждения проводится с использованием результатов книги ⁽⁸⁾ и следующей леммы.

Лемма 1. Если M_0 — многообразие, вложенное в фазовое пространство Φ , то можно так изменить вложение на $\text{mod } {}^sI(M, \rho_M)$, чтобы форма $i^*(\eta dx - y dp)$ стала замкнутой.

Доказательство. В самом деле, можно предполагать, что соотношения 1) условия А) выполнены точно. Тогда вложение i' , заданное формулами

$$\begin{aligned}\xi_I &= \frac{\partial S_{2I}}{\partial y_I} + i \frac{\partial S_{2I}}{\partial x_I}, & \bar{z}^I &= - \left(\frac{\partial S_{2I}}{\partial \eta_I} + i \frac{\partial S_{2I}}{\partial p_I} \right), \\ S_I &= S_{1I} + i S_{2I}, & z &= x + iy, & \xi &= p + i\eta,\end{aligned}$$

как нетрудно видеть, отличается от первоначального на идеал ${}^sI(M, \rho_M)$, не зависит от карты U_I , и при этом форма $\omega = i'^*(\eta dx - y dp)$ точна.

Результаты п.1⁰ принадлежат Б. Ю. Стернину, п.2⁰ — В. Е. Шаталову.

Московский институт инженеров
гражданской авиации

Поступило
25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, М., Изд-во МГУ, 1965. ² В. П. Маслов, ДАН, т. 195, № 3 (1970). ³ V. Maslov, Congres Intern. Math., v. 2, 1970. ⁴ В. В. Кучеренко, ДАН, т. 213, № 5 (1973). ⁵ В. В. Кучеренко, ДАН, т. 213, № 6 (1973). ⁶ Б. Ю. Стернин, Тр. Матем. ф-та Воронежск. гос. унив., в. 10 (1973). ⁷ Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по дифракции и распр. волн, Москва — Ереван, 1973. ⁸ А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Метод канонического оператора Маслова, комплексная теория, 1974. ⁹ В. В. Кучеренко, Матем. сб., 1974. ¹⁰ Б. Ю. Стернин, Тр. Матем. ф-та Воронежск. гос. унив., № 20 (1975). ¹¹ Б. Ю. Стернин, УМН, т. 24, № 1 (1974). ¹² Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, УМН, т. 29, № 3 (1975). ¹³ F. Trèves, J. Diff. Equat., v. 11, N 2 (1972). ¹⁴ F. Trèves, Comm. Pure and Appl. Math., v. 24, № 3 (1971).