

УДК 539.374+517.948.34

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. ЛАРИОНОВ

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО СООТВЕТСТВИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГИХ ТЕЛ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 24 II 1976)

Динамические задачи линейной теории вязкоупругости приводятся к системам интегродифференциальных уравнений вида ^(1, 2)

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \varepsilon \int_0^t K_0(t, \tau)x(\tau)d\tau + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $A_0(t)$, $K_0(t, \tau)$ — непрерывные матричные функции при $t, \tau \geq 0$; $f(t)$ — непрерывная вектор-функция при $t \geq 0$, причем $\|f(t)\| \leq b$; x_0 — заданный вектор; $0 < \varepsilon < 1$ — параметр.

Известно ⁽³⁾, что если функция $Z(t, s)$, где s — параметр, удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dZ(t, s)}{dt} = A_0(t)Z(t, s) + \varepsilon \int_s^t K_0(t, \tau)Z(\tau, s)d\tau, \quad Z(s, s) = I, \quad (2)$$

то решение системы (1) записывается в форме

$$x(t) = Z(t, 0)x_0 + \int_0^t Z(t, s)f(s)ds. \quad (3)$$

Следовательно, задача отыскания решения системы (1) сводится к нахождению решения матричного уравнения (2). Для этой цели используем идею метода, изложенного в ⁽⁴⁾ для частного вида системы (1).

Пусть матрица $A_0(t)$ представляется в виде $A_0(t) = B + \varepsilon C(t)$, где B — постоянная матрица. Обозначим через $X(t) = \exp Bt$ и запишем (2) в интегральной форме

$$Z(t, s) = X(t-s) + \varepsilon \int_s^t X(t+\theta) \left[C(\theta)Z(\theta, s) + \int_s^\theta K_0(\theta, \tau)Z(\tau, s)d\tau \right] d\theta. \quad (4)$$

Если подставить (4) в подынтегральное выражение (2) и изменить порядок интегрирования, то после преобразований уравнение (2) тождественно приводится к виду

$$\frac{dZ(t, s)}{dt} = A_1(t)Z(t, s) + F_1(t, s) - \varepsilon^2 \int_s^t K_1(t, \tau)Z(\tau, s)d\tau, \quad Z(s, s) = I, \quad (5)$$

где обозначено

$$F_1(t, s) = -\varepsilon H_1(t, s), \quad H_1(t, s) = \int_0^{+\infty} K_0(t, s-\theta)X(-\theta)d\theta,$$

$$K_1(t, \tau) = H_1(t, \tau)C(\tau) + \int_\tau^t H_1(t, u)K_0(u, \tau)du, \quad A_1(t) = A_0(t) - F_1(t, t).$$

Далее, в отличие от ⁽⁴⁾, где использовался метод последовательных приближений, повторим преобразования, при помощи которых уравне-

ние (2) приводится к виду (5). Для этого подставим (4) в подынтегральное выражение уравнения (5) и снова изменим порядок интегрирования. Продолжим этот процесс и найдем на k -ом шаге уравнение, эквивалентное уравнению (2):

$$\frac{dZ(t, s)}{dt} = A_k(t)Z(t, s) + F_k(t, s) + (-1)^k e^{k+1} \int_s^t K_k(t, \tau)Z(\tau, s)d\tau, \quad Z(s, s) = I. \quad (6)$$

Здесь

$$F_k(t, s) = \sum_{i=1}^k (-\varepsilon)^i H_i(t, s), \quad H_i(t, s) = \int_0^{+\infty} K_{i-1}(t, s-\theta)X(-\theta)d\theta, \quad (7)$$

$$K_i(t, \tau) = H_i(t, \tau)C(\tau) + \int_{\tau}^t H_i(t, u)K_0(u, \tau)du, \quad A_k(t) = A_0(t) - F_k(t, t).$$

Если теперь продолжить процесс до бесконечности, то в предположении сходимости рядов и интегралов в пределе получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ(t, s)}{dt} = A(t)Z(t, s) + F(t, s), \quad Z(s, s) = I, \quad (8)$$

эквивалентное интегродифференциальному уравнению (2), где обозначено

$$F(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} (-\varepsilon)^i H_i(t, s), \quad A(t) = A_0(t) - F(t, t). \quad (9)$$

Отсюда вытекает естественное название метода эквивалентного соответствия.

В практических расчетах матриц A и F в соотношении (9) следует ограничиться конечным числом слагаемых ряда. В результате этого в уравнение (8) будет вноситься погрешность. Решение $Z_k(t, s)$ матричного уравнения

$$\frac{dZ(t, s)}{dt} = A_k(t)Z(t, s) + F_k(t, s), \quad Z(s, s) = I, \quad (10)$$

где A_k и F_k определяются из соотношения (7), назовем k -м приближением матрицы $Z(t, s)$. Заметим, что уравнение (10) получается из (6) в результате отбрасывания слагаемых порядка ε^{k+1} . Рассмотрим вопрос о погрешности этого приближенного решения.

Пусть $V_k(t, s)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{z} = A_k(t)z$, нормированная при $t=s$, причем для всех $t \geq s \geq 0$ выполняются неравенства

$$\|V_k(t, s)\| \leq c_1 \exp[-\alpha(t-s)], \quad \alpha > 0, \quad (11)$$

$$\int_s^{+\infty} \|F_k(\tau, s)\| \exp \alpha \tau d\tau \leq c_2 \exp \alpha s, \quad \int_0^{+\infty} K_k(t, t-\theta) \exp \alpha \theta d\theta \leq c_3.$$

Тогда так же, как в (4), можно полагать, что для всех $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\|Z(t, s) - Z_k(t, s)\| \leq c_1(1+c_2) [\exp c_1 c_3 \varepsilon^{k+1}(t-s) - 1] \exp[-\alpha(t-s)]. \quad (12)$$

Если теперь выбрать число приближений k так, чтобы выполнялось неравенство $c_1 c_3 \varepsilon^{k+1} < \alpha$, и исследовать (12) на экстремум, то нетрудно про-

верить, что справедливо неравенство

$$\|Z(t, s) - Z_k(t, s)\| \leq c\varepsilon^{k+1}, \quad c = c_1^2 c_3 (1 + c_2) (\alpha - c_1 c_3 \varepsilon^{k+1})^{-1},$$

причем $\|Z(t, s) - Z_k(t, s)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, в качестве k -го приближения решения системы (1) следует взять выражение

$$x_k(t) = Z_k(t, 0)x_0 + \int_0^t Z_k(t, s)f(s)ds. \quad (13)$$

В результате дифференцирования с использованием (10) находим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A_k(t)x + f(t) + F_k(t, 0)x_0 + \int_0^t F_k(t, s)f(s)ds, \quad x(0) = x_0, \quad (14)$$

которому удовлетворяет соотношение (13).

Если использовать оценку (12) и вычесть из (3) соотношение (13), то нетрудно проверить, что справедлива

Теорема. Если выполнены условия (11), то при всех $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\|x(t) - x_k(t)\| \leq c(\|x_0\| + b\alpha^{-1})\varepsilon^{k+1},$$

где $x(t)$ и $x_k(t)$ — соответственно решения систем (1) и (14). При $f(t) \equiv 0$, кроме того, $\|x(t) - x_k(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Заметим, что система (14) значительно проще исходной (1) и к ней применимы известные методы исследования. Во многих случаях она точно интегрируется.

Пусть $C(t) = C$ — постоянная матрица и выполнено условие $K_0(t, \tau) = K_0(t - \tau)$. Тогда в соотношении (3) следует положить $Z(t, s) = Z(t - s)$, причем матрица $Z(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (B + \varepsilon C)Z(t) + \varepsilon \int_0^t K_0(t - \tau)Z(\tau)d\tau, \quad Z(0) = I.$$

Это уравнение по форме совпадает с (2), если в последнем положить параметр $s = 0$. Следовательно, согласно изложенному методу, следует всюду считать $s = 0$, и поэтому система (14) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = A_k x + f(t) + F_k(t)x_0 + \int_0^t F_k(t - \tau)f(\tau)d\tau, \quad x(0) = x_0, \quad (15)$$

где

$$F_k(t) = \sum_{i=1}^k (-\varepsilon)^i \int_0^{+\infty} K_{i-1}(t + \theta)X(-\theta)d\theta, \quad A_k = B + \varepsilon C - F_k(0),$$

$$K_i(t) = \int_0^{+\infty} K_{i-1}(t + \theta)X(-\theta)C d\theta + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} K_{i-1}(t - \tau + \theta)X(-\theta)K_0(\tau)d\theta.$$

Поскольку матрица A_k является постоянной, то система (15) точно интегрируется.

Например, во втором приближении решение задачи о колебаниях линейной вязко-упругой системы, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\varepsilon k \dot{x} + p^2 x = \varepsilon p^2 \int_0^t \Gamma(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad x(0) = x_1, \quad \dot{x}(0) = x_2,$$

имеет вид

$$x(t) = \left[x_1 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(x_2 - \frac{a_2}{2} \right) \sin \omega t \right] \exp \frac{a_2}{2} t + \\ + \frac{1}{\omega} \int_0^t [x_1 b_1(\tau) + x_2 b_2(\tau)] \sin \omega(t-\tau) \exp \frac{a_2}{2}(t-\tau) d\tau.$$

Здесь обозначено

$$b_1(t) = -\varepsilon p^2 \Gamma_c(t) + \varepsilon^2 k p^4 \left[\frac{1}{p} \Gamma_s(t) - \Gamma_s'(t) \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2 p^3}{2} \left[\Gamma_c'(0) \Gamma_c(t) - \Gamma_s'(0) \Gamma_s(t) + \frac{1}{p} \Gamma_s(0) \Gamma_s(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \Gamma_c'(\tau) d\tau \right], \\ b_2(t) = \varepsilon p \Gamma_s(t) - \varepsilon^2 k p^3 \Gamma_c'(t) + \frac{\varepsilon^2 p^2}{2} \left\{ \frac{1}{p} \Gamma_s(0) \Gamma_c(t) - \Gamma_s'(0) \Gamma_c(t) - \right. \\ \left. - \Gamma_c'(0) \Gamma_s(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \left[\frac{1}{p} \Gamma_s(\tau) - \Gamma_s'(\tau) \right] d\tau \right\}, \\ \Gamma_c(t) = \int_0^{+\infty} \Gamma(t+s) \cos ps ds, \quad \Gamma_s(t) = \int_0^{+\infty} \Gamma(t+s) \sin ps ds, \\ a_1 = -p^2 - b_1(0), \quad a_2 = -2\varepsilon k - b_2(0), \quad \omega^2 = a_1^2 - \frac{1}{4} a_2^2,$$

причем штрих означает дифференцирование по параметру p .

Автор благодарит А. А. Ильюшина за постановку задачи и полезное обсуждение результатов.

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
24 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Ильюшин, Б. Е. Победра, Основы математической теории термовязкоупругости, М., «Наука», 1970. ² В. В. Москвитин, Сопротивление вязко-упругих материалов, М., «Наука», 1970. ³ Я. В. Быков, О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фрунзе, 1957. ⁴ Э. И. Гегель, Г. С. Ларионов, ДАН, т. 223, № 5, 1098 (1975).