

В. Г. МАЗЬЯ, Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВБЛИЗИ РЕБРА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 II 1976)

Асимптотические формулы для решений эллиптических краевых задач вблизи ребра содержат линейные комбинации решений однородных модельных задач в двугранном угле (см., например, ⁽¹⁾). Коэффициентами в линейных комбинациях являются функции на ребре, зависящие от данных задачи в целом. В настоящей статье приводятся оценки и формулы для этих коэффициентов. Аналогичным вопросам для задач в областях с коническими точками посвящена статья ⁽²⁾.

1. Область, функциональные пространства и крайняя задача. Пусть G — компактное замыкание открытого подмножества $\dot{G}$ евклидова пространства R^n , ограниченное $(n-1)$ -мерным многообразием ∂G . Допустим, что на ∂G выделено замкнутое подмножество M , которое является гладким (класса C^∞) $(n-2)$ -мерным подмногообразием R^n , и что M также есть гладкое подмногообразие. Предположим еще, что в окрестности каждой точки из M множество G диффеоморфно n -мерному двугранному углу.

Пусть β — гладкая вещественная функция на M , $p \in (1, \infty)$, l — целое, $l > \max_h \{s_h\}$. Будем говорить, что функция u с носителем вблизи M принадлежит пространству $V_{2,\beta}^l(G)$, если

$$\|u\|_{V_{2,\beta}^l(G)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^l \int_G r^{2(\beta(z)-l+|\alpha|)} |D_x^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} < \infty,$$

где $r=r(x)$ — расстояние от точки $x \in G$ до M , z — ближайшая к x точка M .

Если $M \cap \text{supp } u = \emptyset$, то $u \in V_{2,\beta}^l(G)$ в том и только в том случае, когда

$u \in W_2^l(G)$. Норма в $V_{2,\beta}^l(G)$ для функций с любыми носителями определяется естественным образом с помощью разбиения единицы.

Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_T$ — связные компоненты множества $\partial G \setminus M$. Через $V_{2,\beta}^{l-1/2}(\Gamma_q)$, $1 \leq q \leq T$, обозначим пространство следов на Γ_q функций из $V_{2,\beta}^l(G)$.

Введем матричный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x, D_x)$ в G (с гладкими коэффициентами) с элементами $\mathcal{L}_{h,j}$ ($h, j=1, \dots, k$), $\text{ord } \mathcal{L}_{h,j} \leq s_h + t_j$, где s_h, t_j — целые числа такие, что $t_j > 0$, $\max_h \{s_h\} = 0$, $s_1 + t_1 + \dots + s_k + t_k = 2m$.

Пусть в окрестности каждого множества Γ_q определен матричный дифференциальный оператор $\mathcal{B}_q(x, D_x)$ с гладкими коэффициентами размеров $m \times k$. Предположим, что порядки элементов $(\mathcal{B}_q)_{i,j}$ не меняются на Γ_q и удовлетворяют неравенствам $\text{ord } (\mathcal{B}_q)_{i,j} \leq \sigma_{q,i} + t_j$, где $\sigma_{q,i}$ — целые числа.

Положим

$$\mathcal{V}_{2,\beta}^{l+\vec{t}}(G) = \prod_{j=1}^k V_{2,\beta}^{l+t_j}(G), \quad \mathcal{V}_{2,\beta}^{l-\vec{\sigma}}(\partial G) = \prod_{q=1}^T \prod_{i=1}^m V_{2,\beta}^{l-\sigma_{q,i}, t^{-1/2}}(\Gamma_q).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}u)(x)=f(x), \quad x \in G; \quad (\mathcal{B}_q u)(x)=g_q(x), \quad x \in \Gamma_q \quad q=1, \dots, T. \quad (1)$$

Будем считать, что оператор $\mathcal{L}$ — эллиптический и что оператор $\mathcal{B}_q$ накрывает $\mathcal{L}$ на $\bar{\Gamma}_q$, $1 \leq q \leq T$. Очевидно, оператор задачи (1)

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}: \mathcal{V}_{2, \beta}^{l+\vec{t}}(G) \rightarrow \mathcal{V}_{2, \beta}^{l-\vec{s}}(G) \times \mathcal{V}_{2, \beta}^{l-\vec{\sigma}-1/2}(\partial G) \quad (2)$$

непрерывен. Необходимые и достаточные условия нётеровости оператора (2), формулируемые в терминах однозначной разрешимости «модельной» задачи, известны (см., ⁽³⁾). В дальнейшем предполагается, что оператор (2) осуществляет изоморфизм. Пусть еще имеет место формула Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{B}u, \mathcal{T}v)_{\partial G} = (u, \mathcal{L}^*v)_G + (\mathcal{P}u, \mathcal{C}v)_{\partial G}, \quad (3)$$

где u, v — любые гладкие вектор-функции, равные нулю вблизи M , $\{\mathcal{B}, \mathcal{P}\}$ — матрица Дирихле и оператор $\{\mathcal{L}^*, \mathcal{C}\}$ обладает теми же свойствами, что и $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$.

2. Асимптотика решения. Обозначим через $\mathcal{U}$ открытое подмножество G , $\mathcal{U} \cap M \neq \emptyset$. Предположим, что $\mathcal{U} \cap G$ есть часть двугранного угла $\mathcal{D} = \{x = (y, z): y \in K, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, где K — угол $\{y = (r, \omega): 0 \leq r < \infty, 2|\omega| \leq \alpha\}$. Пусть $\mathcal{B}^\pm$ — предельные значения матрицы $\mathcal{B}$ граничных операторов в точке $z \in M \cap \mathcal{U}$ при $z \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \pm \alpha/2$. Допустим, что коэффициенты главной части $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}^\pm\}$ оператора $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}^\pm\}$ постоянны в $\mathcal{U}$ и функция β постоянна на $\mathcal{U} \cap M$.

Введем операторы

$$\mathbf{L}_{h,j}(\omega; rD_r, D_\omega) = r^{s_{h,j}+t_j} \mathring{\mathcal{L}}_{h,j}(D_y, 0),$$

$$\mathbf{B}_{h,j}^\pm(\omega; rD_r, D_\omega) = r^{s_{h,j}+t_j} \mathring{\mathcal{B}}_{h,j}^\pm(D_y, 0).$$

Пусть $k_- < \text{Im } \lambda < k_+$ — наибольшая полоса на комплексной плоскости $\{\lambda\}$, содержащая прямую $\text{Im } \lambda = \beta + 1 - l$ и свободная от спектра оператора $\{\mathbf{L}(\lambda), \mathbf{B}^\pm(\lambda)\}$, где

$$\mathbf{L}(\lambda) = \|\mathbf{L}_{h,j}(\omega; \lambda - it_j, D_\omega)\|, \quad \mathbf{B}^\pm(\lambda) = \|\mathbf{B}_{\tau,j}^\pm(\lambda - it_j, D_\omega)\|$$

$$1 \leq h, \quad j \leq k, \quad 1 \leq \tau \leq m.$$

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ собственные числа оператора $\{\mathbf{L}(\lambda), \mathbf{B}^\pm(\lambda)\}$, расположенные на прямой $\text{Im } \lambda = k_-$, через κ_j — алгебраическую кратность

числа λ_j и через $\{\Phi_j^{(0, \mu)}, \dots, \Phi_j^{(\kappa_j^{(\mu)}-1, \mu)}\}$, $\mu=1, \dots, N_j$ жордановы цепочки оператора $\{\mathbf{L}(\lambda), \mathbf{B}^\pm(\lambda)\}$, отвечающие λ_j , $\kappa_j = \kappa_j^{(1)} + \dots + \kappa_j^{(N_j)}$. Введем частные решения однородной задачи $\{\mathring{\mathcal{L}}(D_y, D_z), \mathring{\mathcal{B}}(D_y, D_z)\}$ в двугранном угле $\mathcal{D}$:

$$w_j^{(h, \mu)}(x) = r^{i\lambda_j} \sum_{h=0}^{\kappa_j^{(\mu)}} \frac{1}{h!} (i \log r)^h \Phi_j^{(h-h, \mu)}(\omega);$$

$$0 \leq h < \kappa_j^{(\mu)}, \quad 1 \leq \mu \leq N_j.$$

Упорядочим эти функции произвольным образом: $W_1, \dots, W_\kappa$, $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_s$.

Пусть γ — вещественная постоянная, удовлетворяющая неравенствам $k_- - 1 < \gamma + 1 - l < k_-$ такая, что в полосе $\gamma + 1 - l \leq \text{Im } \lambda < k_-$ нет собственных чисел оператора $\{\mathbf{L}(\lambda), \mathbf{B}^\pm(\lambda)\}$. Введем функции η_1, η_2 из $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$, $\eta_1 \eta_2 = \eta_1$.

Предположим, что

$$\eta_2 D_z^\tau f \in \mathcal{V}_{2, \gamma}^{l-\vec{s}}(G), \quad \eta_2 D_z^\tau g \in \mathcal{V}_{2, \gamma}^{l-\vec{\sigma}-1/2}(\partial G)$$

для всех мультииндексов τ . Тогда решение $u \in \mathcal{V}_{2,\beta}^{l+t}(G)$ допускает представление

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z) W_j(y) + R(x), \quad x \in \mathcal{U}, \quad (4)$$

где $\eta_1 D_z^\tau R \in \mathcal{V}_{2,\gamma}^{l+t}(G)$, а c_j — гладкие функции на $\mathcal{U} \cap M$ (см., (1)).

3. Формулы и оценки для коэффициентов $c_j(z)$. Поместим начало декартовых координат в произвольную точку $O \in \mathcal{U} \cap M$ и положим $\rho = |x|$, $\sin \theta = |y| \rho^{-1}$, $\theta \in [0, \pi]$, а через Ω обозначим локальные координаты точки $x \rho^{-1}$ на S^{n-1} .

Пусть $Q = \mathcal{D} \cap S^{n-1}$ и $V_{2,\beta}^l(Q)$ — пространство с нормой

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^l \int (\sin \theta)^{2(\beta-|\alpha|)} |D_\alpha^\alpha u|^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

(для функций с носителями в координатной окрестности на S^{n-1}). Пространства $\mathcal{V}_{2,\beta}^{l+t}(Q)$, $\mathcal{V}_{2,\beta}^{l-s}(Q)$, $\mathcal{V}_{2,\beta}^{l-\vec{s}-1/2}(\partial Q)$ вводятся так же, как соответствующие пространства на G .

Определим операторы

$$\mathfrak{L}_{h,j}(\Omega; \rho D_\rho, D_\alpha) = \rho^{s_h+t_j} \dot{\mathcal{L}}_{h,j}(D_x),$$

$$\mathfrak{B}_{ij}^\pm(\Omega; \rho D_\rho, D_\alpha) = \rho^{\sigma_i \pm t_j} \dot{\mathcal{B}}_{i,j}^\pm(D_x).$$

Из нетеровости оператора $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$ следует, что оператор

$$\{\mathfrak{L}(\Lambda), \mathfrak{B}^\pm(\Lambda)\}: \mathcal{V}_{2,\beta}^{l+t}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{2,\beta}^{l-s}(Q) \times \mathcal{V}_{2,\beta}^{l-\vec{s}-1/2}(\partial Q),$$

где Λ — комплексный параметр и

$$\mathfrak{L}(\Lambda) = \|\mathfrak{L}_{h,j}(\Omega; \Lambda - it_j, D_\alpha)\|, \quad \mathfrak{B}^\pm(\Lambda) = \|\mathfrak{B}_{i,j}(\Omega; \Lambda - it_j, D_\alpha)\|,$$

имеет дискретный спектр. Если λ_j — собственное число оператора $\{L(\lambda), B^\pm(\lambda)\}$, то оно является также собственным числом оператора $\{\mathfrak{L}(\Lambda), \mathfrak{B}^\pm(\Lambda)\}$ и каждая жорданова цепочка $\{\varphi_j^{(0,\mu)}, \dots, \varphi_j^{(\kappa_j^{(\mu)}-1,\mu)}\}$ порождает

жорданову цепочку $\{\Phi_j^{(0,\mu)}, \dots, \Phi_j^{(\tilde{\kappa}_j^{(\mu)}-1,\mu)}\}$, $\tilde{\kappa}_j^{(\mu)} \geq \kappa_j^{(\mu)}$, оператора $\{\mathfrak{L}(\Lambda), \mathfrak{B}^\pm(\Lambda)\}$, определяемую равенствами

$$\Phi_j^{(h,\mu)}(\Omega) = (\sin \theta)^{i\lambda_j} \sum_{h=0}^{\kappa_j^{(\mu)}} \frac{1}{h!} (i \log \sin \theta)^h \varphi_j^{(h-\kappa_j^{(\mu)}, \mu)}(\omega), \quad 0 \leq h < \kappa_j^{(\mu)}$$

Обозначим через $\{\mathfrak{L}^*(\bar{\Lambda}), \mathfrak{L}(\bar{\Lambda})\}$ оператор, сопряженный с оператором $\{\mathfrak{L}(\Lambda), \mathfrak{B}(\Lambda)\}$ относительно формулы, Грина в «двуугольнике» Q

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{L}(\bar{\Lambda})u, v)_Q + (\mathfrak{B}(\Lambda)u, \mathfrak{L}(\bar{\Lambda})v)_{\partial Q} = \\ & = (u, \mathfrak{L}^*(\bar{\Lambda})v)_Q + (\mathfrak{L}(\Lambda)u, \mathfrak{L}(\bar{\Lambda})v)_{\partial Q}, \end{aligned}$$

порожденной формулой (3). Существуют жордановы цепочки $\{\Psi_j^{(0,\mu)}(\Omega),$

$\dots, \Psi_j^{(\tilde{\kappa}_j^{(\mu)}-1,\mu)}(\Omega)\}$ из пространства $V_{2,-\beta+l+q}^{q+\vec{s}}(Q)$, $q \geq \max_j \{t_j\}$,

оператора $\{\mathcal{E}^*(\Lambda), \mathcal{E}(\Lambda)\}$, отвечающие собственному числу λ_j и подчиненные условиям «биортогональности»

$$\sum_{v=0}^k \sum_{p=v+1}^{\mu+v+1} \frac{1}{p!} (\mathcal{Q}^{(p)}(\lambda_j) \Phi_j^{(k-v,s)}, \Psi_i^{(\mu-p+v+1,t)})_Q + \\ + \sum_{v=0}^k \left(\sum_{l=v+1}^{\mu+v+1} \frac{1}{l!} \mathfrak{P}^{(l)}(\lambda_j) \Phi_j^{(k-v,s)}, \sum_{h=0}^{\mu+v+1-l} \frac{1}{h!} \mathfrak{T}^{(h)}(\lambda_i) \Psi_i^{(\mu+v+1-l-h,t)} \right)_{\partial Q} = \\ = \delta_{i,j} \delta_{s,t} \delta_{x_j^{(s)} - k-1, \mu}.$$

Введем вектор-функции

$$v_j^{(k,\mu)}(\rho, \Omega) = \rho^{i\bar{\lambda}_j - n + s} \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} (i \log \rho)^h \Psi_j^{(k-h,\mu)}(\Omega)$$

и упорядочим их: через V_p обозначим $v_j^{(\bar{x}_j^{(\mu)} - k-1, \mu)}$, если $W_p = u_j^{(k,\mu)}$. (Функции V_p удовлетворяют задаче $\{\mathcal{L}^*(D_*), \mathcal{E}^*(D_x)\} V = 0$ в двугранном угле $\mathcal{D}$.)

Существует единственное решение $\zeta_p = \zeta_p(\cdot, O)$ однородной задачи, сопряженной с задачей (1), такое, что

$$\zeta_p - \eta V_p \in \mathcal{V}_{2, -\beta+l+q}^{\vec{s}+q}(G), \quad q \geq \max_j \{t_j\},$$

где $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\eta = 1$, в окрестности точки O .

Теорема. Функции c_j из формулы (4) определяются равенствами

$$c_j(O) = i \int_G f(x) \overline{\zeta_j(x, O)} dx - i \int_{\partial G} g(x) \overline{(\mathcal{T} \zeta_j)(x, O)} dx$$

для любой точки $O \in \mathcal{U} \cap M$. Справедлива оценка

$$\| \eta_1 c_j \|_{W_2^{l-1+kA-\gamma}(M)} \leq c (\| \eta_2 f \|_{\mathcal{V}_{2, \gamma}^{l-\vec{s}}(G)} + \| \eta_2 g \|_{\mathcal{V}_{2, \gamma}^{l-\vec{\sigma}-1/2}(\partial G)}).$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова
Ленинградский электротехнический институт связи
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
30 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, Тбилиси, 1971, т. 1, «Мецниереба», 1973, стр. 171. ² В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, ДАН, т. 219, № 2, 286 (1974). ³ В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, ДАН, т. 210, № 3, 529 (1973).