

В. Т. ФОМЕНКО, С. Б. КЛИМЕНТОВ

ОБ ИЗГИБАНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $p \geq 0$
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ
В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 I 1976)

1. Пусть R_3 — трехмерное риманово пространство; R_2^p — замкнутая поверхность рода $p \geq 1$ с положительной внешней кривизной в пространстве R_3 . А. В. Погореловым сформулирована (и доказана для случая $p=1$), а В. Т. Фоменко доказана следующая теорема (см. ⁽²⁾, гл. 6, § 12 и ⁽³⁾).

Теорема 1. В пространстве R_3 поверхность R_2^p , $p > 1$, жесткая; поверхность R_2^1 , закрепленная в одной точке, жесткая.

И. Н. Векуа в книге ⁽¹⁾, гл. 5, § 3, построил примеры жестких, но изгибаемых поверхностей (под изгибанием здесь и везде далее мы понимаем непрерывное изгибание). Так, например, из результатов И. Н. Векуа следует, что полусфера в трехмерном евклидовом пространстве, склеенная с нерастяжимой абсолютно гибкой нитью и закрепленная в одной точке, кинематически жесткая. Но в то же время такая поверхность изгибаема.

Таким образом, из жесткости поверхности не вытекает ее неизгибаемость. Поэтому имеет смысл постановка вопроса об изгибаемости поверхности R_2^p .

Наряду с этим представляется интересным также следующий вопрос: изгибаема ли поверхность рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны с краем?

Содержание настоящей заметки — теорема о неизгибаемости поверхности R_2^p при $p > 1$ и неизгибаемости поверхности R_2^1 при условии закрепления ее одной точки, а также теорема об изгибаемости поверхности рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны с краем. Для классов регулярности геометрических объектов, для функциональных пространств и норм в них нами используются обозначения ⁽⁴⁾.

2. В римановом пространстве R_3 с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ класса C_α^5 , $0 < \alpha < 1$, рассмотрим замкнутую поверхность R_2^p рода $p \geq 1$, положительной внешней кривизны $K_I \geq k_0 > 0$, принадлежащую классу C_α^5 , $0 < \alpha < 1$. Также рассмотрим поверхность S_2^p рода $p \geq 0$, положительной внешней кривизны $K_I \geq k_0 > 0$, класса C_α^5 , $0 < \alpha < 1$, обладающую гладким краем. Край поверхности S_2^p предполагаем состоящим из конечного числа простых, замкнутых, попарно непересекающихся кривых. Поверхность S_2^p будем считать строго внутренней частью поверхности F_2^p рода $p \geq 0$, положительной внешней кривизны $K_I \geq k_0 > 0$, класса C_α^5 , $0 < \alpha < 1$, с краем класса C_α^3 , $0 < \alpha < 1$, который состоит из конечного числа простых, замкнутых, попарно непересекающихся кривых.

В дальнейшем будем считать, что в римановом пространстве R_3 в окрестности $R_2^p(F_2^p)$ построена полугеодезическая система координат с базисной поверхностью $R_2^p(F_2^p)$, причем на базисной поверхности, в силу положительности ее внешней кривизны, в окрестности каждой точки системе координат можно считать изотермически сопряженной (⁽¹⁾, гл. 2).

3. Прежде чем сформулировать полученные нами результаты, введем необходимые понятия и проведем некоторые вспомогательные построения.

Пусть поверхность $\bar{R}_2^p$ изометрична поверхности R_2^p и лежит достаточно близко к ней (в области невырожденности введенных полугеодезических координат). Через $\xi = (\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ обозначим вектор, составленный из разностей контравариантных координат соответствующих по изометрии точек поверхностей $\bar{R}_2^p$ и R_2^p . Вектор ξ есть вектор-функция точки поверхности R_2^p , определяющая изометрическое преобразование поверхности R_2^p .

Аналогично вводится вектор, определяющий изометрическое преобразование поверхности S_2^p .

Будем рассматривать поверхность R_2^p как замкнутую риманову поверхность $\bar{R}_2^p$ рода p . Поверхность $S_2^p(F_2^p)$ будем рассматривать как риманову поверхность $\bar{S}_2^p(F_2^p)$ рода p , с краем $((^3))$, о римановой поверхности с краем см. $(^4)$, гл. 2, § 1).

Зафиксируем конечное покрытие римановой поверхности $\bar{R}_2^p$ параметрическими кругами W_i . Это покрытие обозначим $\{W_i\}$.

Пусть $f(z)$ есть функция или тензорная величина класса $C_\alpha^k(\bar{R}_2^p)$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. Обозначим через $\bar{W}_i$ замыкание множества W_i . Через $C_\alpha^k(f, \bar{W}_i)$ будем обозначать норму $f(z)$ в замкнутом параметрическом круге $\bar{W}_i$, вводимую И. Н. Векуа $(^1)$, гл. 1, § 1). Норму $f(z)$ на римановой поверхности $\bar{R}_2^p$ введем так:

$$C_\alpha^k(f, \bar{R}_2^p) = \max_i C_\alpha^k(f, \bar{W}_i).$$

Нетрудно видеть, что полученное нормированное пространство будет полным.

Очевидно, что при замене покрытия римановой поверхности $\bar{R}_2^p$ введенная нами норма, вообще говоря, изменится, но останется эквивалентной прежней.

Нормой вектора ξ на римановой поверхности $\bar{R}_2^p$ будем называть максимум норм его компонент.

Аналогично предыдущему вводится норма функций, тензорных величин и векторов на римановых поверхностях с краем $\bar{F}_2^p$ и $\bar{S}_2^p$ (при этом используются покрытия римановых поверхностей $\bar{F}_2^p$ и $\bar{S}_2^p$ параметрическими кругами и полукругами).

4. Точная формулировка теоремы о неизгибаемости поверхности R_2^p выглядит так.

Теорема 2. Для поверхности R_2^p существует константа C такая, что если вектор ξ определяет изометрическое преобразование поверхности R_2^p и $C_\alpha^3(\xi, \bar{R}_2^p) \leq C$, то:

при $p > 1$ $\xi = 0$ на R_2^p ;

при $p = 1$ $\xi = 0$ на R_2^p , если поверхность R_2^p закреплена в одной точке.

Относительно поверхности с краем S_2^p справедлива следующая теорема об изгибаемости.

Теорема 3. а) Пусть $\Phi(z) \neq 0$ — аналитическая на $\bar{F}_2^p$ функция. Существует константа K такая, что если $C_\alpha^3(\Phi, \bar{F}_2^p) < K$, то функции $\Phi(z)$ соответствует нетривиальное изометрическое преобразование поверхности S_2^p в семействе близких поверхностей, в котором это преобразование функцией $\Phi(z)$ определяется однозначно. Поверхность, изометричная поверхности S_2^p , будет принадлежать классу регулярности C_α^3 .

б) Если $\{\Phi_t(z)\}$, $t \in [0, 1]$, — множество аналитических на $\bar{F}_2^p$ функций такое, что $C_\alpha^3(\Phi_t, \bar{F}_2^p)$ непрерывно зависит от t , $C_\alpha^3(\Phi_t, \bar{F}_2^p) < K \forall t \in [0, 1]$ и $\Phi_0(z) = 0$, то этому множеству соответствует непрерывное изгибание поверхности S_2^p в семействе близких поверхностей с сохранением класса регулярности C_α^3 .

Можно показать, что на римановой поверхности F_2^p существует несчетное множество семейств функций, удовлетворяющих условиям пункта б) теоремы 3.

5. Известно, что уравнение изометрических преобразований поверхности R_2^p в римановом пространстве в окрестности каждой ее точки имеет вид $(^2)$, гл. 6, § 7)

$$L(\xi) = \Omega(\xi), \quad (1)$$

где

$$L(\xi) = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha du^\beta + g_{\alpha\beta} d\xi^\beta du^\alpha + \xi^k \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^k} du^\alpha du^\beta,$$

$$\Omega(\xi) = a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + a_{\alpha\beta}' \xi^\alpha d\xi^\beta + a_{\alpha\beta}'' d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

(здесь $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства, вычисленный на поверхности, (u^1, u^2) — сопряженно-изотермическая параметризация поверхности, $a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta}', a_{\alpha\beta}''$ — известные тензоры).

Изометрические преобразования поверхности R_2^p в «целом» также определяются уравнением (1), рассматриваемым как тензорное уравнение на римановой поверхности R_2^p .

Изометрические преобразования поверхности S_2^p определяются тензорным уравнением (1), рассматриваемым на римановой поверхности с краем S_2^p .

Доказательство теорем 2 и 3 проводилось путем исследования свойств операторов L и Ω на соответствующих римановых поверхностях. Для исследования свойств операторов L и Ω нами были обобщены некоторые теоремы И. Н. Векуа о свойствах оператора Tf (см. $(^1)$, гл. 1). Приведем основное используемое нами свойство оператора Tf на римановой поверхности.

Пусть R — замкнутая риманова поверхность рода p ; G — область на ней; Γ — граница G , состоящая из конечного числа простых, замкнутых, попарно непересекающихся кривых; $\bar{G} = G \cup \Gamma$.

Пусть, далее, $f(z)$ — коварианта по $\bar{z}$ на R (о ковариантах см. $(^5)$, гл. 3, § 2) и $M(t, z)$ — ядро Коши на R , дивизор особенностей которого лежит вне $\bar{G}$ (о ядре $M(t, z)$ см. $(^6)$).

Рассмотрим оператор

$$Tf = -\frac{1}{\pi} \int \int_G f(t) M(t, z) dT.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Предположим, что $\Gamma \in C_\alpha^{m+1}$, $f(z) \in C_\alpha^m(\bar{G})$, $m \geq 0$, $0 < \alpha < 1$.

Тогда функция $g(z) = Tf$ принадлежит классу $C_\alpha^{m+1}(\bar{G})$, причем Tf вполне непрерывно отображает пространство ковариант по $\bar{z}$ класса $C_\alpha^m(\bar{G})$ в пространство функций класса $C_\alpha^m(\bar{G})$. Справедлива оценка

$$C_\alpha^{m+1}(Tf, \bar{G}) \leq k_1 \cdot C_\alpha^m(f, \bar{G}),$$

где константа k_1 от f не зависит.

Теорема 4 доказывается с использованием соответствующей теоремы И. Н. Векуа для плоской области (см. $(^1)$, гл. 1, § 8) и разбиения единицы на римановой поверхности R .

Ростовский государственный университет

Поступило
24 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. 2 А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969. 3 В. Т. Фоменко, ДАН, т. 213, № 1 (1973). 4 М. Шиффер, Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, М., 1957. 5 Р. Неванlinna, Униформизация, М., 1955. 6 С. Я. Гусман, Ю. Л. Родин, Сибирск. матем. журн., т. 3, № 4 (1962).