

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 II 1976)

1. Обозначим через K класс целых функций $f(z)$, обладающих свойством: справедливо представление

$$\frac{1}{f(z)} = c + \frac{A}{z} + \sum \left\{ \frac{A_k}{z - \lambda_k} + \frac{A_k}{\lambda_k} \right\}, \quad (1)$$

где постоянные c, A, A_k, λ_k вещественны и

$$\sum |A_k| \lambda_k^{-2} < \infty. \quad (2)$$

Этот класс был введен М. Г. Крейном ⁽¹⁾ и нашел приложения в теории операторов и проблеме моментов ^(2, 3). М. Г. Крейн показал * ⁽¹⁾, что функции класса K не выше экспоненциального типа и удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln |f(t)|| (1+t^2)^{-1} dt < \infty. \quad (3)$$

В настоящей работе получено описание класса K в терминах специальных конформных отображений **, которые были использованы в работе В. А. Марченко и автора ⁽¹¹⁾ для описания класса $\mathfrak{F}$ вещественных целых функций $u(z)$ таких, что все корни уравнения $u^2(z)=1$ вещественны.

Как известно ⁽⁴⁾, стр. 324), вещественные целые функции $f(z)$ экспоненциального типа, удовлетворяющие условию (3), допускают представление

$$f(z) = dz^n \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\lambda_k| \leq R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right), \quad (4)$$

где $d = \text{const}$, $n=0$ или 1 , λ_k — корни $f(z)$. Следовательно, такие функции определяются своими корнями с точностью до постоянного множителя. Поэтому для описания класса K достаточно дать описание множеств E вещественных чисел, которые могут служить множествами корней функций класса K .

Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность всех функций $\theta(z)$, отображающих конформно полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на области вида

$$\{p\pi < \text{Re } \theta < q\pi, \text{Im } \theta > 0\} \setminus \bigcup_{p < k < q} \{\text{Re } \theta = k\pi, 0 \leq \text{Im } \theta \leq h_k\}, \quad (5)$$

где p, q, k — целые числа (возможно, $p = -\infty, q = +\infty$), $0 \leq h_k < \infty, \theta(\infty) = \infty$. В полуплоскость $\text{Im } z < 0$ функции $\theta(z)$ продолжаем формулой $\theta(z) = \overline{\theta(\bar{z})}$. Каждой функции $\theta(z) \in \mathfrak{R}$ отвечает на вещественной оси в z -плоскости система отрезков $[a_k, b_k], p < k < q$, являющихся прообразами отрезков $\{\text{Re } \theta = k\pi, 0 \leq \text{Im } \theta \leq h_k\}, p < k < q$.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что множество E вещественных

* Обобщения этого результата на функции более широких классов, чем K и K_m (см. ниже), даны в работах ⁽⁴⁻⁹⁾.

** Они составляют узкий подкласс класса отображений, которые применялись ранее для исследования экстремальных задач теории целых функций (см. ⁽¹⁰⁾), где указана библиография).

чисел λ_k , $-\infty \leq p_1 < k < q_1 \leq \infty$, удовлетворяет условию (R), если существует функция $\theta(z) \in \mathfrak{R}$ с $p=p_1$, $q=q_1$, такая что $\lambda_k \in [a_k, b_k]$, $p < k < q$.

Замечание. Можно показать, что каждому множеству E , удовлетворяющему условию (R), отвечает бесконечное множество $\Theta(E)$ различных функций $\theta(z) \in \mathfrak{R}$, но если $E_1 \neq E_2$, то $\Theta(E_1) \neq \Theta(E_2)$.

Теорема 1. *Множество E совпадает с множеством корней целой функции класса K тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию (R).*

Таким образом, класс K совпадает с классом целых функций, которые получаются с помощью такой конструкции: 1) возьмем произвольную область вида (5) и конформно отображим ее на полуплоскость $\text{Im } z > 0$ так, чтобы $\infty \rightarrow \infty$; 2) на каждом из отрезков $[a_k, b_k]$, $p < k < q$, в которые переходят вертикальные вырезы области (5), выберем по одной точке λ_k ; 3) составим выражение, стоящее в правой части (4) (предел обязательно существует).

2. Докажем теорему 1. Пусть $f(z) \in K$. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0$, т. е. что в представлении (1) имеем $A=0$. Определим вещественную целую функцию $u(z)$ равенством

$$\frac{u(z)}{f(z)} = -z + \sum \left\{ \frac{c_k |A_k|}{z - \lambda_k} + \frac{c_k |A_k|}{\lambda_k} \right\}, \quad c_k > 1, \quad \sum \frac{c_k |A_k|}{\lambda_k^2} < \infty. \quad (6)$$

Учитывая (1), имеем

$$\frac{u(z) \pm 1}{f(z)} = -z \pm c + \sum \left\{ \frac{c_k |A_k| \pm A_k}{z - \lambda_k} + \frac{c_k |A_k| \pm A_k}{\lambda_k} \right\}.$$

Мнимая часть выражения, стоящего справа, сохраняет знак в каждой из полуплоскостей $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$. Поэтому все корни уравнений $u(z) = 1$ и $u(z) = -1$ вещественны и у каждого из этих уравнений перемежаются с корнями $f(z)$. Следовательно, $u(z) \in \mathfrak{F}$ и по теореме 1.1 работы ⁽¹¹⁾ имеем представление $u(z) = \cos \theta(z)$, где $\theta(z) \in \mathfrak{R}$. Из (1) и (6) видно, что $u(\lambda_k) = c_k \text{sign } A_k$. Поскольку $|u(\lambda_k)| > 1$, то $\text{Re } \theta(\lambda_k) \equiv 0 \pmod{\pi}$, и точки λ_k , следовательно, находятся на отрезках, являющихся прообразами вертикальных вырезов области (5). Так как концами этих отрезков являются корни уравнений $u(z) = 1$ и $u(z) = -1$, которые перемежаются с корнями $f(z)$, то точки λ_k лежат ровно по одной на каждом отрезке. Таким образом, множество $E = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условию (R).

Пусть теперь $E = \{\lambda_k\}$ — некоторое множество, удовлетворяющее условию (R), $\theta(z) \in \mathfrak{R}$ — соответствующее конформное отображение. Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \notin \{\lambda_k\}$, $\theta(0) \not\equiv \pm \pi/2 \pmod{\pi}$. В силу замечаний 1 и 2 на стр. 546 работы ⁽¹¹⁾ функция $u(z) = \cos \theta(z)$ является целой функцией не выше экспоненциального типа, удовлетворяет условию вида (3), а все ее корни μ_k вещественны, просты и расположены по одному в промежутке между двумя соседними прообразами вертикальных вырезов. Так как точки λ_k находятся по одной на каждом из этих прообразов, то μ_k и λ_k перемежаются. По теореме М. Г. Крейна ⁽⁴⁾, стр. 398) произведение

$$\pi(z) = \prod (1 - z\mu_k^{-1})(1 - z\lambda_k^{-1})^{-1} \quad (7)$$

сходится, и его мнимая часть сохраняет знак в каждой из полуплоскостей $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$.

Так как функция $u(z)$ удовлетворяет условию вида (3), то она допускает представление

$$u(z) = d \lim \prod_{|\mu_k| \leq R} \left(1 - \frac{z}{\mu_k} \right),$$

где d — постоянная. В силу сходимости произведения (7) отсюда следует, что существует предел (4), и соотношение (4) определяет некоторую целую функцию $f(z)$. Покажем, что $f(z) \in K$.

По теореме Н. Г. Чеботарева ((⁴), стр. 400) о функциях с мнимой частью, сохраняющей знак в каждой из полуплоскостей $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$, функция $\pi(z)$ допускает представление

$$\pi(z) = az + b + \sum \left\{ \frac{B_k}{z - \lambda_k} + \frac{B_k}{\lambda_k} \right\}, \quad (8)$$

где a, b, B_k — вещественные постоянные и

$$\sum |B_k| \lambda_k^{-2} < \infty. \quad (9)$$

Так как $\pi(z) = u(z)/f(z)$, то из (8) вытекает, что $B_k = u(\lambda_k)/f'(\lambda_k)$. Поскольку $\text{Re } \theta(\lambda_k) \equiv 0 \pmod{\pi}$, то $|u(\lambda_k)| \geq 1$, и, полагая $A_k = 1/f'(\lambda_k)$, из (9) выводим (2). Из (2) следует, что ряд, стоящий в правой части (1), сходится абсолютно. Рассматривая разность между суммой этого ряда и функцией $1/f(z)$, легко убеждаемся, что эта разность является целой функцией не выше экспоненциального типа, ограниченной в углах $|\arg z \pm (\pi/2)| \leq (\pi/2) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу принципа Фрагмена — Линделефа эта разность является постоянной. Таким образом, справедливо представление (1) и $f(z) \in K$.

3. Теорема 1 допускает обобщение. Обозначим через K_m , $m=0, 1, 2, \dots$ класс целых функций $f(z)$, таких что справедливо представление

$$\frac{1}{f(z)} = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m + \frac{A}{z} + \sum \frac{A_k}{z - \lambda_k} \left(\frac{z}{\lambda_k} \right)^{m+1}, \quad (10)$$

где $c_0, \dots, c_m, A, A_k, \lambda_k$ — вещественные постоянные и $\sum |A_k| \lambda_k^{-m-2} < \infty$. Обозначим через K_m , $m=-1, -2, \dots$, класс целых функций $f(z)$, для которых выполняется (10) с $c_0 = \dots = c_m = 0$, $m=-1$, и, кроме того, $\sum |A_k| \lambda_k^{m+2} < \infty$. Легко видеть, что $K = K_0$, $K_m \subset K_{m+1}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и каждая функция класса $K_{m-1}(K_{m+1})$ получается из некоторой функции класса K_m умножением (делением) на подходящую линейную функцию.

Теорема 2. Множество E совпадает с множеством корней целой функции класса K_m с $m \geq 0$ (с $m < 0$) тогда и только тогда, когда оно получается из множества, удовлетворяющего условию (R), удалением (добавлением) $|m|$ точек.

4. В заключение рассмотрим связь между классом $\mathfrak{F}$ и классом $K = K_0$.

Теорема 3. Имеет место строгое включение $\mathfrak{F} \subset K$. Всякая функция $f(z) \in K$ допускает представление $f(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_j(z) \in \mathfrak{F}$, $j=1, 2$.

Теорема 4. Если $u(z) \in \mathfrak{F}$, то $u'(z) \in K$, но не обязательно $u'(z) \in \mathfrak{F}$ или $u''(z) \in K$. Если $f(z) \in K_m$, то $f'(z) \in K_{m+2}$.

Фиксируя функцию $\theta(z) \in \mathfrak{R}$, обозначим через $K(\theta)$ множество всех функций класса K , построенных по $\theta(z)$ с помощью конструкции п. 1.

Теорема 5. Для любой функции $\theta(z) \in \mathfrak{R}$ множество $K(\theta) \cap \mathfrak{F}$ непусто. Эта теорема является следствием такого утверждения, возможно, представляющего самостоятельный интерес: для любой функции $u(z) \in \mathfrak{F}$ найдется функция $u_1(z) \in \mathfrak{F}$, такая что $u^2(x) + u_1^2(x) \geq 1$, $-\infty < x < \infty$.

Физико-технический институт низких температур
Академия наук УССР
Харьков

Поступило
15 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, 309 (1947). ² М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, 293 (1952). ³ Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., 1966. ⁴ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. ⁵ И. В. Островский, ДАН, т. 116, № 5, 742 (1957). ⁶ В. И. Мацаев, ДАН, т. 132, № 2, 283 (1960). ⁷ И. В. Островский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, 277 (1961). ⁸ А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М., 1970. ⁹ Е. Н. Сергиенко, Теория функций, функц. анализ и их прилож., Респ. научн. сб., Харьков, в. 21, 83 (1974). ¹⁰ Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин, В сб.: Исследование по совр. пробл. теории функций компл. перем., М., 1960, стр. 111. ¹¹ В. А. Марченко, И. В. Островский, Матем. сб., т. 97 (139) 538 (1975).