

УДК 517.947.4

МАТЕМАТИКА

Ш. А. АЛИМОВ

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 16 IV 1976)

Рассмотрим произвольную N -мерную область G и оператор Лапласа $-\Delta$ с областью определения $C_0^\infty(G)$. Обозначим символом $\tilde{A}$ произвольное неотрицательное самосопряженное расширение оператора Лапласа в $L_2(G)$ с соответствующим спектральным семейством $\{E_\lambda\}$.

Для любого $s \geq 0$ введем средние Рисса

$$E_\lambda^s = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t.$$

В настоящей работе рассматриваются спектральные разложения $E_\lambda f$ и их средние Рисса $E_\lambda^s f$ функций, принадлежащих пространству Соболева $W_p^l(G)$. Символом $W_p^l(G)$ мы будем обозначать пространство функций, принадлежащих $W_p^l(G)$ и имеющих компактный носитель в G .

Как известно, достаточным условием равномерной на любом компакте $K \subset G$ сходимости $E_\lambda^s f$ к функции f , принадлежащей $W_p^l(G)$, является выполнение при $p \geq 1$, $s \geq 0$, $l > 0$ следующих условий:

$$l+s \geq (N-1)/2, \quad pl > N. \quad (1)$$

Эти условия были впервые найдены в работах В. А. Ильина ⁽¹⁾ при $s=0$ и в работе автора и В. А. Ильина ⁽²⁾ при $s \geq 0$. Отметим, что в ⁽²⁾ равномерная сходимость $E_\lambda^s f$ при выполнении условий (1) установлена не только в классах Соболева W_p^l , но и в более широких классах Никольского H_p^l , причем в последнем случае показатель $l > 0$ может принимать любые (не обязательно целые) значения.

Кроме того, В. А. Ильиным доказано (см. ⁽²⁾), что условия равномерной сходимости (1) являются окончательными. Именно, если $l+s < (N-1)/2$, то существует функция f , имеющая в G все непрерывные частные производные до порядка l включительно, для которой средние $E_\lambda^s f$ неограничены в некоторой точке. Что же касается условия $pl > N$, то выполнение противоположного неравенства $pl \leq N$ допускает существование неограниченной функции $f \in W_p^l$, средние Рисса которой заведомо не могут сходиться к ней равномерно. Иначе говоря, равномерной сходимости не будет, поскольку разлагаемая функция не является непрерывной.

В связи с этим возникает следующий вопрос: будет ли справедлива теорема о равномерной сходимости, если в условиях (1) неравенство $pl > N$ заменить равенством $pl = N$ и дополнительно потребовать, чтобы функция f была непрерывна в области G . В настоящей заметке на этот вопрос дается отрицательный ответ.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка области G и пусть числа $s \geq 0$, $p \geq 1$ и целое $l > 0$ связаны соотношениями

$$l+s = (N-1)/2, \quad pl = N. \quad (2)$$

Тогда найдется функция $f \in W_p^1(G)$, непрерывная в области G и такая, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \overline{E_\lambda^s} f(x_0) = +\infty.$$

Не случайным является то обстоятельство, что в соотношениях (2) первое условие имеет вид равенства $l+s=(N-1)/2$. Если это условие заменить неравенством $l+s>(N-1)/2$, то ответ на поставленный выше вопрос будет положительным. Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть D — произвольная подобласть области G и пусть числа $s \geq 0$, $p \geq 1$ и целое $l > 0$ связаны соотношениями

$$l+s > (N-1)/2, \quad pl = N. \quad (3)$$

Тогда для любой непрерывной в области D функции $f \in W_p^1(G)$ равномерно на каждом компакте $K \subset D$ выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x).$$

Отметим, что при выполнении условий (3) поведение в произвольной фиксированной точке x спектрального разложения или средних Рисса функции f из класса W_p^1 зависит лишь от гладкости функции f в этой точке x . Для того чтобы более точно сформулировать соответствующее утверждение, обозначим символом $f_r(x)$ среднее значение функции f на сфере радиуса r с центром в точке x .

Теорема 3. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка области G и пусть выполняются соотношения (3).

Тогда для любой функции $f \in W_p^1(G)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x_0) = f(x_0),$$

выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x_0) = f(x_0).$$

Таким образом, для сходимости в некоторой точке спектрального разложения или его средних Рисса при выполнении условий (3) достаточным оказывается лишь требование обобщенной непрерывности разлагаемой функции и притом только в данной точке.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

¹ В. А. Ильин, ДАН, т. 114, № 4 (1957); т. 115, № 4 (1957). ² Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, ДАН, т. 193, № 1 (1970).