

УДК 678:624.074.4.001

МЕХАНИКА

Р. Ю. АМЕНЗАДЕ

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КОЛЕБАНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 15 IV 1976)

Уравнения движения для потенциала несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат (ξ, φ, r) имеют вид (1)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0, \quad (1)$$

$$p = -\rho \partial \Phi / \partial t, \quad (2)$$

где Φ — потенциал скорости, p — гидродинамическое давление, ρ — плотность жидкости, а t — время.

Разделяя переменные, ограничиваясь рассмотрением падающей волны и вводя безразмерные величины

$$t = t_0 \tau, \quad \xi = ax, \quad r = ay, \quad \delta = \gamma a$$

(a — радиус оболочки), для потенциала скорости будем иметь

$$\Phi = \{A(\tau)e^{i h \varphi} + B(\tau)e^{-i h \varphi}\} J_k(i \delta y) e^{-i \delta x}. \quad (3)$$

Здесь $A(\tau)$ и $B(\tau)$ — произвольные функции интегрирования, J_k — функции Бесселя первого рода k -го порядка, δ — волновое число, k — число волн в окружном направлении, а t_0 — характерное время, которое в дальнейшем определим как $t_0 = a[(1 - \nu^2)\rho/E]^{1/2}$, где ν , ρ и E — коэффициент Пуассона, плотность и модуль упругости материала оболочки.

Введя безразмерные величины

$$\Phi = \frac{a^2}{t_0} \bar{\Phi}, \quad W = a w, \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{h},$$

с учетом гипотезы Кирхгофа — Лява и гидродинамической силы, после ряда преобразований уравнениям неосесимметричного движения безмоментной линейно-упругой тонкостенной оболочки придадим вид

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + w_r + \nu \frac{\partial w_\xi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tau} \Big|_{y=1} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial \tau^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \tau^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w_\xi}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial x \partial \varphi} + \nu \frac{\partial w_r}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (6)$$

Условие непроницаемости запишем следующим образом:

$$\frac{\partial w_r}{\partial \tau} = \{A_-(\tau)e^{i h \varphi} + B_-(\tau)e^{-i h \varphi}\} i \delta J'_k(i \delta) e^{-i \delta x}, \quad (7)$$

где A_- и B_- — безразмерные функции времени, а w_r будем искать в виде

$$w_r = \{\alpha(\tau)e^{i h \varphi} + \beta(\tau)e^{-i h \varphi}\} e^{-i \delta x}. \quad (8)$$

Учитывая последнее представление и условие (7), для потенциала будем иметь

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{i\delta J_k'(i\delta)} \{ \dot{\alpha}(\tau) e^{i\hbar\tau} + \beta(\tau) \bar{e}^{i\hbar\tau} \} J_k(i\delta y) e^{-i\delta x}. \quad (9)$$

Здесь под точкой понимается дифференцирование по τ .

Представим w_ξ и w_φ в виде

$$w_\xi = \{ C(\tau) e^{-i\hbar\tau} + D(\tau) e^{-i\hbar\tau} \} e^{-i\delta x}, \quad (10)$$

$$w_\varphi = \{ C_*(\tau) e^{i\hbar\tau} + D_*(\tau) e^{-i\hbar\tau} \} e^{-i\delta x}. \quad (11)$$

Учитывая выражения (8), (9), (10) и (11) в уравнениях движения оболочки (4), (5) и (6), получим однородную систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно переменных α , β , C , D , C_* , D_* , которые ищем в виде

$$\alpha = \alpha_0 e^{i\omega\tau}, \quad \beta = \beta_0 e^{i\omega\tau},$$

$$C = C_0 e^{i\omega\tau}, \quad D = D_0 e^{i\omega\tau}, \quad C_* = C_{0*} e^{i\omega\tau}, \quad D_* = D_{0*} e^{i\omega\tau},$$

где $\omega = t_0 \omega_*$ — безразмерная частота, $c = \omega/\delta$ — фазовая скорость, а α_0 , β_0 , C_0 , D_0 , C_{0*} , D_{0*} — некоторые постоянные. Подставляя эти решения в упомянутую систему дифференциальных уравнений и введя обозначение

$$M_k = 1 + \mu \frac{J_k(i\delta)}{i\delta J_k'(i\delta)}$$

для указанных коэффициентов получим однородную систему шести линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим осесимметричный случай $k=0$. В этом случае система имеет вид

$$\begin{aligned} -i\nu\delta C_0 + (1 - \omega^2 M_0) \alpha_0 &= 0, & -i\nu\delta D_0 + (1 - \omega^2 M_0) \beta_0 &= 0, \\ (\omega^2 - 1/2 (1 - \nu) \delta^2) C_{0*} &= 0, & (\omega^2 - 1/2 (1 - \nu) \delta^2) D_{0*} &= 0, \\ (\omega^2 - \delta^2) C_0 - i\nu\delta \alpha_0 &= 0, & (\omega^2 - \delta^2) D_0 - i\nu\delta \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение данной системы расщепляется на два случая. В первом случае $C_0 = D_0 = \alpha_0 = \beta_0 = 0$, а $C_{0*} \neq 0$ и $D_{0*} \neq 0$. Это соответствует тому, что в оболочке жидкости нет, $w_r = w_\xi = 0$. Отлично от нуля только окружное перемещение оболочки w_φ . В этом случае $c = ((1 - \nu)/2)^{1/2}$, что соответствует безразмерной скорости распространения крутильной волны в оболочке.

Во втором случае $C_{0*} = D_{0*} = 0$, а $C_0 \neq 0$, $D_0 \neq 0$, $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. Это соответствует осесимметричному движению жидкости в упругой оболочке; при этом $w_r \neq 0$, $w_\xi \neq 0$, а $w_\varphi = 0$. Тогда решение дисперсионного уравнения принимает вид

$$\omega^2 = \frac{1 + M_0 \delta^2}{2M_0} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{4M_0 \delta^2 (1 - \nu^2)}{(1 + M_0 \delta^2)^2} \right)^{1/2} \right\} \quad (13)$$

Для длинных волн ($\delta \rightarrow 0$) $M_0 \sim 1 + 2\mu/\delta^2$ и

$$c \sim \left\{ \frac{1 + 2\mu}{4\mu} \left[1 \pm \left(\frac{8\mu (1 - \nu^2)}{(1 + 2\mu)^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \quad (14)$$

Легко показать, что для любых значений μ , $\mu > 0$,

$$8\mu (1 - \nu^2) < (1 + 2\mu)^2.$$

Таким образом, понятно, что (14) соответствуют два положительных безразмерных значения c , одно из которых (большее) соответствует асимптотическому значению оболочечной скорости, а меньшее — асимптотическому значению скорости распространения волны в жидкости при $\delta \rightarrow 0$. Для

очень коротких волн ($\delta \rightarrow \infty$) $M_0 \sim 1$. В этом случае асимптотическое значение безразмерной оболочечной скорости $c_1 \rightarrow 1$, а асимптотическое значение безразмерной скорости распространения волны в жидкости $c_2 \rightarrow 0$. Таким образом, можно сделать вывод, что для очень коротких волн реакция жидкости на систему оболочка — жидкость незначительна.

Рассмотрим теперь случай $k \neq 0$. Удовлетворяя условию нетривиальности решения системы, найдем дисперсионное уравнение. Применим теорему Лапласа о понижении порядка определителя, после некоторых вычислений дисперсионное уравнение принимает вид

$$M_k(\omega^2)^3 - \left\{ 1 + \frac{3-\nu}{2} M_k(\delta^2 + k^2) \right\} (\omega^2)^2 + \left\{ (1-\nu) M_k \delta^2 k^2 + \frac{1-\nu}{2} M_k(\delta^4 + k^4) + \right. \\ \left. + \frac{3-\nu(1+2\nu)}{2} \delta^2 + \frac{1-\nu}{2} k^2 \right\} \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} (1-\nu^2) \delta^4 = 0. \quad (15)$$

Полученное уравнение является кубическим относительно ω^2 . Два корня характеризуют продольные волны, распространяющиеся в оболочке и жидкости. Третий корень характеризует крутильную волну в оболочке.

Для длинноволнового процесса ($\delta \ll 1$) при $k=0$, $k=1$ и $k=2$ величины M_k представимы соответственно в виде

$$M_0 \sim 1 + 2\mu/\delta^2, \quad M_1 \sim 1 + \mu, \quad M_2 \sim 1 + \mu/2.$$

Учитывая эти разложения в уравнении (15), для следующих параметров системы $\mu=5$ и $\nu=0,4$ получены численные зависимости $\omega-\delta$, анализируя которые можно сделать следующие выводы.

1. Неосесимметричность, характеризуемая постоянной k , на два порядка увеличивает значения частот продольной волны, распространяющейся в оболочке, по сравнению с осесимметричным случаем; значения частот увеличиваются при увеличении числа k .

2. Неосесимметричность на два порядка уменьшает частоты продольной волны, распространяющейся в жидкости, по сравнению с осесимметричным случаем; значения частот уменьшаются при увеличении числа k .

3. При неосесимметричности значения частот крутильной волны в оболочке на три порядка больше по сравнению с величинами частот в случае распространения только крутильной волны в оболочке при отсутствии в ней жидкости; частоты увеличиваются при увеличении числа k .

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
2 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Механика сплошной среды, т. 2, М., 1970, стр. 568.