

УДК 517.948:513.88:518

МАТЕМАТИКА

А. Д. ГОРБУНОВ

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 11 XII 1975)

1. Пусть на функциональном пространстве L , элементы которого определены на компакте K , задан оператор A ; требуется определить его неподвижные точки, т. е. точки x , удовлетворяющие условию

$$x = Ax, \quad x \in L. \quad (1)$$

Ясно, что рассматриваемая задача поставлена, вообще говоря, некорректно.

2. Предположим, что в пространстве L определена некоторая метрика ρ . Пусть положительное число h_0 таково, что при $h \in (0, h_0]$ на h -сетке N_h для компакта K построена аппроксимация A^h оператора A и, следовательно, аппроксимация

$$x^h = A^h x^h \quad (2^h)$$

уравнения (1), где x^h — сеточная функция, определенная на N_h .

Будем говорить, что семейство функций $x^{(h)}$, $0 < h \leq h_0$, пространства L компактно в (L, ρ) при $h \rightarrow 0$, если из любой последовательности допустимых значений параметра h , сходящейся к нулю, можно выделить такую ее подпоследовательность h_v , $v=1, 2, \dots$, что последовательность функций $x^{(h_v)}$ сходится в (L, ρ) (см. (2)).

Пусть на пространстве L_h сеточных функций, заданных на N_h , определено как-либо расстояние ρ_h . Будем говорить, что семейство расстояний ρ_h , $0 < h \leq h_0$, сильно согласовано с расстоянием ρ , если для любых двух последовательностей $x^{(v)}$, $y^{(v)}$, $v=1, 2, \dots$, точек из L , сходящихся в (L, ρ) , справедливо соотношение

$$\rho_h([x^{(v)}]^h, [y^{(v)}]^h) \rightarrow \rho(x^{(v)}, y^{(v)})$$

при $h \rightarrow 0$ равномерно относительно v , где $[x]^h$ — сужение функции x на N_h .

Будем говорить, что семейство операторов A^h , $0 < h \leq h_0$, сильно аппроксимирует оператор A , если для любой последовательности $x^{(v)}$, $v=1, 2, \dots$, точек пространства L , сходящейся в (L, ρ) , справедливо соотношение

$$\rho_h([Ax^{(v)}]^h, A^h[x^{(v)}]^h) \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, $v \rightarrow +\infty$ (см. (1)).

Будем говорить, что семейство уравнений (2^h) , $0 < h \leq h_0$, разрешимо, если существует действительная неотрицательная функция $\varepsilon(h)$, $0 < h \leq h_0^* \leq h_0$,

$$\varepsilon(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

и такая, что для оператора A^h существует $\varepsilon(h)$ -подходящая точка $x^h \in L_h$, т. е. такая, что

$$\rho_h(x^h, A^h x^h) \leq \varepsilon(h).$$

Теорема 1. Пусть семейство операторов A^h , $0 < h \leq h_0$, сильно аппроксимирует непрерывный оператор A и семейство расстояний ρ_h сильно согласовано с расстоянием ρ .

Тогда, для того чтобы оператор A имел, по крайней мере, одну неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы семейство уравнений (2^h) было $\varepsilon(h)$ -разрешимо и существовало продолжение на компакт K семейства $\varepsilon(h)$ -подходящих точек x^h соответственно для операторов A^h , компактно в (L, ρ) при $h \rightarrow 0$.

3. Пусть для произвольного элемента $x^h \in L_h$ указан способ построения его продолжения $\{x^h\}$ на компакт K такой, что:

- а) $\{x^h\} \in L$,
- б) если $x^h = y^h$, то $\{x^h\} = \{y^h\}$;
- в) если $\{x^h\} = \{y^h\}$, то $x^h = y^h$.

Тогда расстояние ρ_h в пространстве L_h можно определить по формуле

$$\rho_h(x^h, y^h) = \rho(\{x^h\}, \{y^h\}), \quad x^h, y^h \in L_h. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть в пространстве L_h , $0 < h \leq h_0$, метрика ρ_h определена по формуле (3) и выполняются условия:

- а) для произвольной точки $x \in L$

$$\rho(x, \{[x]^h\}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0;$$

- б) для произвольной последовательности $x^{(v)}$, $v=1, 2, \dots$, точек пространства L , сходящейся в (L, ρ) к точке x ,

$$\rho_h([x]^h, [x^{(v)}]^h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad v \rightarrow +\infty$$

равномерно относительно h .

Тогда семейство метрик ρ_h сильно согласовано с метрикой ρ .

4. Приведенные теоремы справедливы в произвольных метрических функциональных пространствах. Однако наибольший интерес представляют уравнения в линейных пространствах. Приведем примеры использования теорем 1 и 2 для изучения нелинейных уравнений в нормированных пространствах.

Пусть пространство L линейно и в нем определена норма $\|\cdot\|$. Метрику, определенную по формуле $\rho_0(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in L$, будем называть соответствующей нормой $\|\cdot\|$. Пусть в пространстве L_h определена норма $\|\cdot\|_h$. Семейство норм $\|\cdot\|_h$, $0 < h \leq h_0$ будем называть сильно согласованным с нормой $\|\cdot\|$, если семейство ρ_h метрик, соответствующих нормам $\|\cdot\|_h$, сильно согласовано с метрикой ρ_0 .

Пример 1. Пусть $L = C_0[a, b]$, где $C_0[a, b]$ — пространство действительных непрерывных функций $u(x)$ действительного аргумента x , определенных на отрезке $[a, b]$ с нормой $\|u\|_{C_0} = \max |u(x)|$. Пусть $N_h = \langle x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \rangle - h$ — сетка для отрезка $[a, b]$. Обозначим через L_h пространство действительных сеточных функций $u^h = \{u_k, k = 0, \dots, n\}$, определенных на сетке N_h . Норму в L_h определим по формуле $\|u^h\|_h = \|u^h\|_1 = \max |u_k|$.

Семейство норм $\|\cdot\|_h$, $0 < h \leq b - a$, сильно согласовано с нормой $\|\cdot\|_{C_0}$.

Пример 2. В пространстве $C_0[a, b]$ рассмотрим оператор

$$Tu = f\left(x, \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi, \int_a^b G_x'(x, \xi) u(\xi) d\xi\right), \quad u \in C_0[a, b],$$

где $f(x, y, y')$ — действительная функция, равномерно непрерывная в полосе

$$S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty;$$

$G(x, \xi)$ — функция Грина для уравнения $y'' = u(x)$ с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$. Оператор T^h , аппроксимирующий оператор T , определим

по формуле

$$T^h u^h = \left\{ f \left(x_h, \int_a^b G(x_h, \xi) \{u^h\}(\xi) d\xi, \int_a^b G_x'(x_h, \xi) \{u^h\}(\xi) d\xi \right), k=0, \dots, n \right\},$$

$$u^h \in L_h; \quad \{u^h\}(x) = u_k + \frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} (x - x_k), \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad k=0, \dots, n-1.$$

Семейство операторов T^h , $0 < h \leq b-a$, сильно аппроксимирует оператор T .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ В. М. Рябенский, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостехиздат, 1956. ² А. Д. Горбунов, Разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Изд-во МГУ, 1973.