

УДК 539.376

МЕХАНИКА

Академик АН АрмССР Н. Х. АРУТЮНЯН

О ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНО НАСЛЕДСТВЕННО-СТАРЕЮЩИХ СРЕД

1. Основные реологические уравнения для однородно наследственно-стареющих сред получены в работе (1). Ниже дается обобщение этих уравнений для неоднородно наследственно-стареющих сред, исходя из технологических условий изготовления реальных конструкций, где особое значение приобретает фактор, когда возраст материала зависит от пространственных координат. Именно этой зависимостью обусловлена неоднородность наследственно-стареющих сред, что, в свою очередь, определяет вид функций, характеризующих упруго-мгновенную деформацию $E(\tau)$ и деформацию ползучести $C(t, \tau)$ для таких сред в зависимости от пространственных координат.

Обозначим через τ_0 момент приложения напряжения к элементу неоднородно наследственно-стареющей среды, расположенному в окрестности точки $\mathbf{r} = \{x_i\}$, а через τ_1^* — момент изготовления этого элемента (τ_1^* — момент времени, начиная с которого можно говорить о том, что механическое поведение данной среды описывается уравнениями теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел). Пусть далее t — момент наблюдения, а τ_1 — возраст материала среды в момент приложения напряжения. Очевидно, что

$$\tau_1 = \tau_0 - \tau_1^*. \quad (1)$$

Тогда основное реологическое уравнение для неоднородно наследственно-стареющей среды при одноосном напряженном состоянии будет иметь следующий вид (здесь суммирование по i не проводится):

$$\varepsilon_{ii}(t) = \frac{\sigma_{ii}(t)}{E(t - \tau_1^*)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_{ii}(\tau) K(t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*) d\tau, \quad (2)$$

где $K(t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*)$ — ядро оператора Вольтерра уравнения для неоднородно наследственно-стареющих сред, которое в дальнейшем будем обозначать $K^*(t, \tau)$. Оно связано с ядром уравнения для однородно наследственно-стареющих тел

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] \quad (3)$$

следующим соотношением:

$$K^*(t, \tau) = K(t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*). \quad (4)$$

В общем случае при объемном напряженном состоянии основные уравнения, описывающие изменение формы и изменение объема неоднородно

наследственно-стареющих сред, будут иметь вид

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G(t-\tau_1^*)} - \int_{\tau_0}^t s_{ij}(\tau) K_2(t-\tau_1^*, \tau-\tau_1^*) d\tau, \quad (5)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E^*(t-\tau_1^*)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) K_1(t-\tau_1^*, \tau-\tau_1^*) d\tau.$$

Здесь $s_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ — девиаторы тензора напряжений и деформаций, $\theta(t) = 3\varepsilon(t)$ — объемная деформация, $\sigma(t)$ — среднее гидростатическое давление, $G(t)$ — мгновенный модуль сдвига, $E^*(t)$ — мгновенный модуль объемной деформации, а $K_1(t, \tau)$ и $K_2(t, \tau)$ — соответственно ядра объемной и сдвиговой деформаций ползучести.

Далее, пусть возраст материала τ_1 зависит от пространственных координат $\mathbf{r} = \{x_i\}$, т. е.

$$\tau_1 = \tau_1(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Для определенности выберем в качестве начала отсчета времени момент изготовления элемента с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и введем возраст $\kappa(\mathbf{r})$ относительно этого элемента:

$$\tau_1^*(0) = 0, \quad \tau_0 = \tau_1(0), \quad \kappa(\mathbf{r}) = \tau_1(\mathbf{r}) - \tau_1(0). \quad (7)$$

Тогда реологические уравнения (5) примут следующий вид:

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G[t+\kappa(\mathbf{r})]} - \int_{\tau_1(0)}^t s_{ij}(\tau) K_2[t+\kappa(\mathbf{r}), \tau+\kappa(\mathbf{r})] d\tau, \quad (8)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E^*[t+\kappa(\mathbf{r})]} - \int_{\tau_1(0)}^t \sigma(\tau) K_1[t+\kappa(\mathbf{r}), \tau+\kappa(\mathbf{r})] d\tau$$

Реологические уравнения (8) являются основными уравнениями теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред при объемном напряженном состоянии в случае малых деформаций.

2. Основные краевые задачи теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред можно сформулировать так: пусть в области V , занятой телом, действуют массовые силы $F_i(t)$, тогда компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ должны удовлетворять уравнению равновесия или уравнению движения сплошной среды при малых деформациях:

$$\sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, \quad (10)$$

где $u_i(t)$ — вектор перемещений, ρ — плотность; индексы, стоящие после запятой, означают дифференцирование по соответствующим координатам.

Уравнение (9) применяется к квазистатическим задачам, а уравнение (10) — к динамическим задачам.

Далее, компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$, которые связаны с компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ интегральными соотношениями (8), должны удовлетворять шести независимым уравнениям совместности Сен-Венана

$$\varepsilon_{ij,kl}(t) + \varepsilon_{kl,ij}(t) = \varepsilon_{ik,jl}(t) + \varepsilon_{jl,ik}(t) \quad (11)$$

или, выраженные через поле смещений, — соотношениям Коши

$$2\varepsilon_{ij}(t) = u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t). \quad (12)$$

Пусть на части B_σ поверхности тела B с единичным вектором нормали n_i задаются поверхностные силы

$$\sigma_{ij}(t)n_j = P_i(t), \quad (13)$$

а на части B_u поверхности B — смещения

$$u_i(t) = \Delta_i(t). \quad (14)$$

Соотношения (8) и (9) — (14) составляют полную систему уравнений теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред при изотермических процессах.

Наиболее характерной краевой задачей для этих уравнений является задача при непостоянных во времени граничных поверхностях B_u и B_σ . Изменения B_u и B_σ отражают непрерывное и дискретное наращивания тела элементами различного возраста.

3. Анализ полученных уравнений показывает, что из-за некоммутативности операторов наследственности (8), описывающих свойства в различных точках неоднородно наследственно-стареющих тел, к ним неприменим (кроме некоторых частных задач) принцип Вольтерра.

При решении прикладных задач можно воспользоваться для меры ползучести $C(t, \tau)$ известным выражением из ⁽¹⁾

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)f(t-\tau). \quad (15)$$

Функция старения $\varphi(\tau)$ обычно аппроксимируется одним из выражений

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{\tau^{\lambda_k}} \quad \text{или} \quad \varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k e^{-\lambda_k \tau}, \quad (16)$$

а функцию $f(t-\tau)$, характеризующую наследственные свойства материала, можно представить в виде

$$f(t-\tau) = \sum_{k=0}^{k=n} B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)}. \quad (17)$$

Здесь C_0 , A_k , B_k , λ_k и γ_k — постоянные параметры, подобранные надлежащим образом для данного материала.

Условия, которым должна удовлетворять функция старения $\varphi(\tau)$, функция наследственности $f(t-\tau)$ и некоторые их приложения излагаются в обзорной статье ⁽²⁾.

Неоднородность наследственно-стареющих тел можно описать при помощи ядер ползучести, зависящих в общем случае не только от временных координат t и τ , но и от пространственных координат x , y , z . Эта точка зрения развита в ^(3, 4), где на основе результатов ⁽¹⁾ приведены реологические уравнения теории ползучести для неоднородных наследственно-стареющих тел.

Институт механики
Академии наук АрмССР

Поступило
10 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, М. — Л., «Гостехиздат», 1952. ² Н. Х. Арутюнян, В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М., «Наука», 1972. ³ Г. Н. Савин, К. У. Уразильдяев, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 5, 130 (1974). ⁴ К. У. Уразильдяев, Прикл. мех., т. 8, в. 1, 93 (1972).