

УДК 536. 25

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, Д. В. ЛЮБИМОВ

О ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 30 III 1976)

В вязкой бинарной смеси при наличии градиентов температуры и концентрации, соответствующих потенциально устойчивой стратификации, возможно возникновение специфической неустойчивости ⁽¹⁾. Механизм этой неустойчивости связан с конкуренцией эффектов теплопроводности и диффузии (см. ⁽²⁾) и проявляется в том случае, когда имеется направленный вверх вертикальный градиент концентрации легкой компоненты и, кроме того, горизонтальные градиенты температуры и концентрации, согласованные между собой так, чтобы отсутствовал горизонтальный градиент плотности. Упомянутый механизм неустойчивости приводит к образованию в жидких и газовых смесях, находящихся в поле тяжести, слоистых течений, которые в последние годы привлекают внимание исследователей ⁽³⁻⁶⁾.

В данной работе проводится исследование термоконцентрационной неустойчивости бинарной смеси, насыщающей пористую среду. Определены границы неустойчивости; показано, что в отличие от обычной вязкой смеси, в рассматриваемой системе наряду с неустойчивостью монотонного типа возможен новый — колебательный — механизм неустойчивости. Появление колебательной неустойчивости обусловлено различием тепловых свойств насыщающей жидкости и твердого скелета.

Будем считать, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации: $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C)$, где T и C — отклонения температуры и концентрации легкой компоненты от некоторых средних значений;

$$\beta_1 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,C}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p,T}.$$

Уравнения конвективной фильтрации в предположении справедливости закона Дарси и обычных приближений Буссинеска имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\nu}{K} g (\beta_1 T + \beta_2 C) \gamma &= 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ b \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla T &= \chi \Delta T, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{u} \nabla C = D \Delta C, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации, p — давление, отсчитываемое от гидростатического, g — ускорение силы тяжести, γ — единичный вектор по вертикали вверх, ν — кинематическая вязкость, K — проницаемость, m — пористость, $b = (\rho_{cr}) / (\rho_{cr})_{ж}$ — отношение теплоемкостей (индексы c и $ж$ относятся соответственно к насыщенной жидкостью пористой среде и жидкости), D и $\chi = \kappa_c / (\rho_{cr})_{ж}$ — эффективные коэффициенты диффузии и теплопроводности.

Рассмотрим плоский вертикальный слой пористой среды, ограниченный параллельными плоскостями $x = \pm h$. Допустим, что внешние условия обеспечивают наличие в среде постоянного вертикального градиента кон-

центрации $\partial C_0/\partial z = B_2 > 0$ (ось z направлена вертикально вверх), а также горизонтальных градиентов $\partial T_0/\partial x = A$; $\partial C_0/\partial x = B_1$. Механическое равновесие возможно лишь при условии отсутствия горизонтального градиента плотности; отсюда следует связь $\beta_1 A + \beta_2 B_1 = 0$.

Для исследования устойчивости равновесия введем возмущения давления, температуры, концентрации и соответствующую (малую) фильтрационную скорость. Уравнения малых возмущений получаются из системы (1) путем линеаризации около равновесных значений. Для записи уравнений в безразмерных переменных введем следующие единицы: расстояния h , времени $b\tilde{h}^2/\chi$, скорости $g\beta_1 AKh/\nu$, температуры Ah , концентрации $\beta_1 Ah^2 (gB_2 K/m\beta_2 \nu D)^{1/2}$, давления $\rho_0 g\beta_1 Ah^2$. Уравнения возмущений в безразмерной форме имеют вид

$$-\nabla p - \mathbf{u} + (T + rC)\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Ru_x = \Delta T, \quad P \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{RN}{r} u_x + ru_z = \Delta C.$$

Система содержит четыре безразмерных параметра — число Рэлея R и его концентрационный аналог R_d : $R = g\beta_1 AKh^2/\nu\chi$, $R_d = r^2 = g\beta_2 B_2 Kh^2/m\nu D$, а также параметры среды $N = \chi/mD$ и $P = \chi/bD$.

Рассмотрим плоские возмущения с компонентами скорости фильтрации $u_x = -\partial\psi/\partial z$, $u_y = 0$, $u_z = \partial\psi/\partial x$ (ψ — функция тока); кроме того, считаем, что все неизвестные функции зависят от времени и продольной координаты по закону $\exp(-\sigma t + ikz)$ («нормальные возмущения») и не зависят от координаты y . Исключая из (2) давление, получим уравнения для амплитуд возмущений (штрих означает производную по поперечной координате x):

$$\begin{aligned} (\psi'' - k^2\psi) - (T' + rC') &= 0, & -\sigma T - ikR\psi &= T'' - k^2T, \\ -\sigma PC + ik \frac{RN}{r} \psi + r\psi' &= C'' - k^2C. \end{aligned} \quad (3)$$

Наиболее естественные граничные условия таковы: на границах слоя исчезают нормальные компоненты фильтрационной скорости и диффузионного потока, а также возмущение температуры, т. е.

$$x = \pm 1: \quad \psi = 0, \quad T = 0, \quad C' = 0. \quad (4)$$

Краевая задача (3), (4) определяет спектр характеристических декрементов σ в зависимости от волнового числа k и перечисленных выше параметров задачи.

Исключая из системы (3) амплитуды T и C , получим уравнение шестого порядка для ψ :

$$(\Delta + \sigma)(\Delta + P\sigma)\Delta\psi = ikR[(N-1)\Delta + (N-P)\sigma]\psi' + r^2(\Delta + \sigma)\psi'' \quad (5)$$

где $\Delta = d^2/dx^2 - k^2$.

Далее будем интересоваться предельным случаем сильной вертикальной стратификации ($r \gg 1$), когда наиболее опасными являются коротковолновые возмущения ($k \gg 1$). Дисперсионные свойства таких возмущений практически не зависят от условий на боковых границах слоя. Имея в виду этот предельный случай, будем искать частное решение уравнения (5), удовлетворяющее лишь условиям $\psi(\pm 1) = 0$ (при этом в случае $k \gg 1$ на границах будут выполняться условия $T = 0$ и $C \sim \psi'$). Дисперсионное соотношение в коротковолновом предельном случае имеет вид

$$\begin{aligned} A\bar{\sigma}^3 + B\bar{\sigma}^2 + C\bar{\sigma} + D &= 0; \\ A &= 4P\bar{k}^2, \quad B = \bar{k}^2\bar{R}^2(N-P)^2 - 4\bar{k}^4(2P+1) - \pi^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$C = \bar{k}^2 [2\bar{k}^2 \bar{R}^2 (N-P) (1-N) + 4\bar{k}^4 (P+2) + 2\pi^2],$$

$$D = \bar{k}^4 [\bar{k}^2 \bar{R}^2 (1-N)^2 - 4\bar{k}^4 - \pi^2].$$

Здесь

$$\sigma = r\bar{\sigma}, \quad k^2 = r\bar{k}^2, \quad R = r^{3/2}\bar{R}. \quad (7)$$

Замена (7) привела дисперсионное соотношение к виду, не содержащему r . Таким образом выделяется зависимость критических параметров возмущений (критического числа Рэлея, волнового числа и декремента) от продольного градиента концентрации в предельном случае больших r .

Анализ дисперсионного соотношения (6) приводит к выводу о существовании двух типов неустойчивости — монотонной и колебательной. Возмущения монотонного типа характеризуются вещественным декрементом $\bar{\sigma}$, а граница устойчивости относительно этих возмущений определяется условием $\bar{\sigma} = 0$, т. е. $D = 0$. Отсюда находится критическое число Рэлея для монотонных возмущений

$$\bar{R}_1^2 = (\pi^2 + 4\bar{k}^4) / \bar{k}^2 (1-N)^2. \quad (8)$$

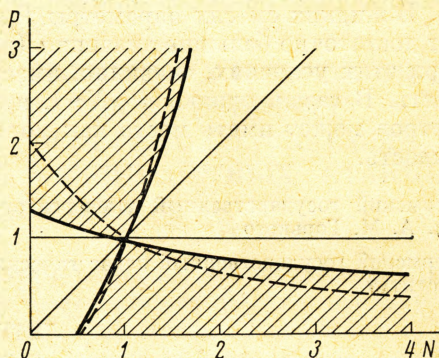


Рис. 1

Минимизация по волновому числу дает минимальное критическое число Рэлея и соответствующее волновое число:

$$\bar{R}_{1m} = 2\sqrt{\pi} / |1-N|, \quad \bar{k}_{1m} = \sqrt{\pi} / 2. \quad (9)$$

Возмущениям колебательного типа отвечают комплексные декременты $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_r + i\bar{\sigma}_i$. Граница устойчивости определяется условием $\bar{\sigma}_r = 0$; мнимая часть $\bar{\sigma}_i$ дает частоту нейтральных колебаний. Из (6) следует, что уравнение нейтральной кривой и нейтральная частота определяются из соотношений $AD - BC = 0$, $\omega^2 = \bar{\sigma}_i^2 = C/A$. Первое из этих соотношений дает уравнение для критического числа $\bar{R}_2$, определяющего границу колебательной неустойчивости:

$$p\bar{R}_2^4 + q\bar{R}_2^2 + s = 0; \quad (10)$$

$$p = \bar{k}^4 (N-P)^3 (1-N), \quad q = \pi^2 \bar{k}^2 (N-P) (2N-P-1) + 2\bar{k}^6 [(N-P)^2 (P+2) - 2(N-P) (1-N) (2P+1) - P(1-N)^2],$$

$$s = -\pi^2 [\pi^2 + 4(P+1)\bar{k}^4].$$

Уравнение (10) определяет $\bar{R}_2(\bar{k}^2, P, N)$. Минимизация по $\bar{k}$ позволяет найти минимальное критическое число Рэлея для колебательной неустойчивости $\bar{R}_{2m}(P, N)$ и соответствующее волновое число $\bar{k}_{2m}(P, N)$; после подстановки $\bar{R}_{2m}$ и $\bar{k}_{2m}$ в формулу $\omega^2 = C/A$ находится частота нейтральных колебаний.

Ответ на вопрос о том, какой тип неустойчивости является ответственным за кризис равновесия, зависит от соотношения между параметрами среды P и N . Результаты анализа представлены на рис. 1. На плоскости (P, N) заштрихованы области значений параметров, при которых неустойчивость связана с колебательными возмущениями ($\bar{R}_{2m} < \bar{R}_{1m}$); границы этих областей приближенно описываются уравнениями: $P(N+3) = 4$ и $(N-P)^2 = (1-N)^2 (P+1)$. В областях, ограниченных штриховыми линиями, уравнения которых $P(N+1) = 2$ и $(N-P)^2 = (1+N)^2 (2P+1)$, колебательные возмущения более опасны при всех значениях волнового числа ($\bar{R}_2 < \bar{R}_1$ при всех $\bar{k}$). В незаштрихованной области ответственной за кризис равновесия является монотонная неустойчивость, причем в области

между линиями $P=N$ и $P=1$ колебательная неустойчивость вообще отсутствует.

Следует заметить, что физический смысл имеет часть плоскости (P, N) , ограниченная прямыми $P=N$ и $P=0$. В самом деле, из определения параметров P и N следует

$$\frac{N}{P} = \frac{b}{m} = 1 + \frac{1-m}{m} \frac{(\rho c_p)_T}{(\rho c_p)_ж} > 1,$$

где $(\rho c_p)_T$ и $(\rho c_p)_ж$ — теплоемкости твердого скелета и жидкости.

В жидких смесях параметры P и N — одного порядка величины и имеют достаточно большие значения (для водных растворов, например, $\sim 10^2$). При этих условиях, очевидно, имеет место только монотонная неустойчивость. В газах, однако, $P \sim N \sim 1$, и в зависимости от значений этих параметров может иметь место как монотонная, так и колебательная неустойчивость.

Пермский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
25 III 1976

Пермский государственный педагогический
институт

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. A. Thorpe, P. K. Hutt, R. Soulsby, J. Fluid Mech., v. 38, № 2, 375 (1969).
- ² Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, М., «Наука», 1972.
- ³ В. Е. Губин, Н. Н. Хазиев, Изв. АН СССР, мех. жидкости и газа, № 3, 166 (1970).
- ⁴ C. F. Chen, D. G. Briggs, R. A. Wirtz, Intern. J. Heat and Mass Transfer, v. 14, № 1, 57 (1971).
- ⁵ J. S. Turner, Ann. Rev. Fluid Mech., v. 6, 1974, p. 37.
- ⁶ R. A. Wirtz, L. H. Liu, Intern. J. Heat and Mass Transfer, v. 18, № 11, 1299 (1975).