

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. ШИХАЛИЕВ

# О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через  $A_p(B)$  (см. (1)) пространств функций  $f(z)$ , аналитических в единичном круге  $B(|z| < 1)$ , с нормой

$$\|f\|_{A_p(B)} = \left( \iint_{|z| < 1} |f(z)|^p dx dy \right)^{1/p} < \infty \quad \forall p \geq 1.$$

Пусть  $f(z) \in A_p(B)$   $\forall p \geq 1$  и  $P_n(z)$  — произвольный многочлен степени  $\leq n$ . Величина  $\inf_{(P_n)} \|f - P_n\| = \Delta_n^{(p)}(f)$  называется наилучшим полиномиальным приближением функции  $f(z)$  в смысле метрики пространства  $A_p(B)$ .

Известно (см. (5), стр. 17), что для функций  $f(z) \in A_p(B)$ ,  $p \geq 1$ , существует наилучший приближающий многочлен  $P_n^{(0)}(z)$  такой, что

$$\Delta_n^{(p)}(f) = \|f(z) - P_n^{(0)}(z)\|_{A_p(B)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Кроме того, для функции  $f(z) \in A_p(B)$ ,  $p \geq 1$ , как известно (см. (4), стр. 63), существует многочлен  $Q_n(z)$  такой, что

$$\rho_p(f; Q_n) = \|f(z) - Q_n(z)\|_{A_p(B)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, имея в виду очевидное неравенство  $\Delta_n^{(p)}(f) \leq \rho_p(f; Q_n)$ ,  $p \geq 1$ , мы можем утверждать, что для функций  $f(z) \in A_p(B)$ ,  $p \geq 1$ , наилучшее приближение  $\Delta_n^{(p)}(f)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому возникает вопрос о нахождении связи между тейлоровскими коэффициентами функции  $f(z) \in A_p(B)$  и величинами  $\Delta_n^{(p)}(f)$  при  $p \geq 1$ . Подобная задача рассматривалась ранее в работе (2) в случае  $p = 2$ .

В решении подобной задачи при  $\forall p \geq 1$  возникает ряд трудностей. Прежде всего нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** Если  $P_n(z)$  — произвольный многочлен степени  $\leq n$ , то существует число  $C_p > 0$  (не зависящее от  $n$ ) такое, что при  $|z| < 1$  имеем

$$|P_n(z)| \leq C_p n^{1/p} \|P_n(z)\|_{A_p(B)}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Допустим, что для некоторого многочлена  $P_n^{(0)}(z)$  хотя бы в одной точке  $z_0$  не существует постоянное  $C_p > 0$ , удовлетворяющее неравенству (1). Следовательно, полагая, например,  $C_p = 2(8\pi/3)^{1/p}$  имеем

$$|P_n^{(0)}(z_0)| > 2(8\pi/3)^{1/p} n^{1/p} \|P_n^{(0)}\|_{A_p(B)}. \quad (2)$$

В работе (3) доказано, что для всех  $P_n(z)$  справедливо

$$\max_{|z| \leq r} |P_n(z)| \leq (8\pi/3)^{1/p} n^{1/p} \left( \int_0^{2\pi} |P_n(re^{i\varphi})|^p r d\varphi \right)^{1/p}. \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) следует

$$\left( \int_0^{2\pi} |P_n^{(0)}(re^{i\varphi})|^p r d\varphi \right)^{1/p} > 2 \|P_n^{(0)}\|_{A_p(B)}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в  $p$ -ю степень, а затем интегрируя по  $r$  от 0 до 1, получим противоречие в виде  $1 > 2^p \quad \forall p \geq 1$ . Это противоречие и доказывает лемму.

**Лемма 2.** Если  $P_n(z)$  — произвольный многочлен степени  $\leq n$ , то существует число  $B_{p,q} > 0$  (не зависящее от  $n$ ) такое, что

$$\|P_n\|_{A_q(B)} \leq B_{p,q} n^{1/p-1/q} \|P_n\|_{A_p(B)} \quad (4)$$

при  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

**Доказательство.** Очевидно, при  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , имеем

$$\|P_n\|_{A_q(B)} \leq \left\{ \sup_{z \in B} |P_n(z)|^{q-p} \right\}^{1/q} \left( \iint_B |P_n(z)|^p dx dy \right)^{1/q}.$$

Отсюда, в силу леммы 1, получим

$$\|P_n\|_{A_q(B)} \leq C_p^{(q-p)/q} n^{1/p-1/q} \|P_n\|_{A_p(B)}^{(q-p)/q} \|P_n\|_{A_p(B)}^{p/q},$$

причем, полагая  $C_p^{(q-p)/q} = B_{p,q}$ , получим неравенство (4).

**Теорема 1.** Пусть  $f(z) \in A_p(B) \quad \forall p \geq 1$  и число  $q, p < q \leq \infty$ , такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^{(p)}(f) \cdot n^{1/p-1/q-1} < \infty. \quad (5)$$

Тогда  $f(z) \in A_q(B)$  и справедливо неравенство

$$\Delta_n^{(q)}(f) \leq C_{p,q} \left[ \Delta_n^{(p)}(f) \cdot n^{1/p-1/q} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k^{(p)}(f) \cdot k^{1/p-1/q-1} \right], \quad (6)$$

где  $C_{p,q}$  — постоянная, не зависящая от  $n, n=1, 2, \dots$

**Доказательство.** Пусть  $f(z) \in A_p(B), p \geq 1$ . Тогда  $\Delta^{(p)}(f) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$f(z) = P_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n \cdot 2^{k+1}} - P_{n \cdot 2^k}) \quad (7)$$

в смысле сходимости по норме в пространстве  $A_p(B)$ . При этом, в силу леммы 2, имеем

$$\|P_{n \cdot 2^{k+1}} - P_{n \cdot 2^k}\|_{A_q(B)} \leq 2^{1/p-1/q+1} B_{p,q} (2^k n)^{1/p-1/q} \Delta_{2^k n}^{(p)}(f).$$

Благодаря этому нетрудно показать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_{n \cdot 2^{k+1}} - P_{n \cdot 2^k}\|_{A_q(B)} \leq C_{p,q} \left[ n^{1/p-1/q} \Delta_n^{(p)}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k^{(p)}(f) \cdot k^{1/p-1/q-1} \right], \quad (8)$$

где  $C_{p,q} = 2^{1/p-1/q+2} B_{p,q}$  не зависит от  $n$ .

Последнее неравенство показывает, что ряд (7) сходится также в смысле метрики пространства  $A_q(B)$  к функции  $f(z)$  и, кроме того,  $f(z) \in A_q(B)$ , причем

$$\Delta_n^{(q)}(f) \leq \|f - P_n\|_{A_q(B)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|P_{n \cdot 2^{k+1}} - P_{n \cdot 2^k}\|_{A_q(B)}.$$

Отсюда, в силу неравенства (8), следует (6).

**Теорема 2.** Для того чтобы  $f(z) \in A_p(B) \quad \forall p \geq 1$  была целой функцией, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\Delta_n^{(p)}(f)]^{1/n} = 0. \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  — целая функция. Тогда  $|a_k| < \varepsilon^k \quad \forall \varepsilon > 0$  при  $k > k_0(\varepsilon)$ . Тогда, полагая  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , получим

$$\Delta_n^{(p)}(f) \leq \|f - P_n\|_{A_p(B)} \leq \frac{\pi^{1/p} \varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon}.$$

Отсюда следует равенство (9). Необходимость условия доказана.

Достаточность условия (9) доказывается, во-первых, при  $1 \leq p < 2$ , а затем при  $p \geq 2$ . Из справедливости (9) следует, что

$$\Delta_n^{(p)}(f) < \varepsilon^n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Поэтому при  $1 \leq p < 2$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_n^{(p)}(f) \cdot n^{1/p - 1/2}$  сходится, и в силу теоремы 1 при  $q=2$  можно показать, что  $[\Delta_n^{(2)}(f)]^{1/n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . В этом случае, как известно (см. (2)),  $f(z)$  является целой функцией.

Далее, при  $p \geq 2$  из неравенства

$$\Delta_n^{(2)}(f) \leq \pi^{1/q} \Delta_n^{(p)}(f), \quad 1/q + 2/p = 1,$$

в силу условия (9), опять-таки вытекает, что  $[\Delta_n^{(2)}(f)]^{1/n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, завершается и доказательство достаточности условия (9).

Кроме приведенных выше утверждений, справедливы также следующие:

**Теорема 3.** Для того чтобы  $f(z) \in A_p(B) \quad \forall p \geq 1$  была целой функцией конечного порядка  $\rho$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln [1/\Delta_n^{(p)}(f)]} = \rho.$$

**Теорема 4.** Для того чтобы  $f(z) \in A_p(B) \quad \forall p \geq 1$  была целой функцией конечного порядка  $\rho$  и нормального типа  $\sigma$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n [\Delta_n^{(p)}(f)]^{\rho/n} = \sigma \exp.$$

Теорема 5. Если  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A_p(B) \quad \forall p \geq 1$  является целой трансцендентной функцией, то существует последовательность целых чисел  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , для которых  $a_{n_k+1} \neq 0$ , и справедливо неравенство

$$\frac{\pi^{1/p}}{\sqrt[n_k]{n_k + 2}} \leq \frac{\Delta_{n_k}^{(p)}(f)}{|a_{n_k+1}|} \leq \frac{C_p \sqrt[p]{\pi n_k^{1/2-1/p}}}{\sqrt[n_k]{n_k + 2} (1 - \varepsilon_k)} \quad \forall p > 2,$$

где  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Институт математики и механики  
Академии наук АзербССР  
Баку

Поступило  
11 XII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, М., «Наука», 1971. <sup>2</sup> A. R. Reddy, J. Approxim. Theory, v. 11, 110 (1974). <sup>3</sup> Дж. И. Мамедханов, ДАН, т. 214, № 1, 37 (1974). <sup>4</sup> Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., ИЛ, 1961. <sup>5</sup> Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965. <sup>6</sup> И. И. Ибрагимов, Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, Изд-во АН АзербССР, 1962.