

Г. А. КАЛЯБИН

ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. М. Никольским 13 X 1975)

1°. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Pi_n = \{|x_s| < \pi; s = 1, 2, \dots, n\}$, n, m, r — натуральные, $m \leq n$; $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ — целочисленный вектор; $p > 1$, $L_p = L_p(\Pi_n)$.

Символом $|f, B|$ будем обозначать норму элемента f в нормированном пространстве B .

На протяжении всей работы j, k, l обозначают индексы, пробегающие соответственно множества значений $\{1, 2, \dots, m\}$, $\{0, 1, 2, \dots\}$, $\{0, 1, \dots, r-1\}$.

Пусть последовательности $\mu_j(v_j) > 0$ не убывают при $v_j \geq 0$ и не возрастают при $v_j < 0$. Через $L_p^{(\mu_j)}$ обозначим совокупность всех функций $g(x) \sim \sum \gamma_v e^{i(v, x)} \in L_p$, для которых

$$|g, L_p^{(\mu_j)}| = \left| \left(\sum \mu_j(v_j) \gamma_v e^{i(v, x)} \right), L_p \right| < \infty. \quad (1)$$

Пусть $L_{p, \Phi}^{r, \mu}$ обозначает совокупность всех функций $f(x, y)$, $x \in \Pi_n$, $0 < y < 1$, для которых

$$\begin{aligned} D_x j &= \int_0^1 \varphi_j(y) |f(x, y), L_p^{(\mu_j)}|^p dy < \infty, \\ D_y^{(r)} &= \int_0^1 \left| \frac{\partial^r}{\partial y^r} f(x, y), L_p \right|^p dy < \infty, \\ |f, L_{p, \Phi}^{r, \mu}| &= \left(D_y^{(r)} + \sum_{j=1}^m D_{x_j} \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (2)$$

где весовые функции $\varphi_j(y) > 0$ предполагаются суммируемыми на $(0, 1)$. Как известно (1), для $f \in L_{p, \Phi}^{r, \mu}$ при почти всех $x \in \Pi_n$ существуют пределы

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{\partial^{l'}}{\partial n^{l'}} f(x, y) = g_l(x) \in L_p, \quad (3)$$

причем сходимости имеет место и в смысле L_p . Если f несуммируема ни на одном интервале $(0, t)$, $0 < t < 1$, то предельная функция $g_0(x) = 0$ для почти всех $x \in \Pi_n$.

При $\mu_j(v_j) = (1 + |v_j|^2)^{\rho/2}$, $\rho > 0$, пространства $L^{(\mu_j)}$ совпадают с периодическими лиувиллевскими классами $L_{p, \Phi}^{r, \rho}$ (1).

Вопрос об описании пространства следов для весовых классов С. Л. Соболева поставлен в (3) и изучался многими авторами при различных предположениях относительно весовых функций.

В настоящей работе устанавливается необходимое и достаточное условие на след в случае $r=1$ и одинаковых весовых функций.

Теорема 1. Пусть $\varphi_j(y) = \varphi(y)$; обозначим

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(y) dy, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

положим $t_0=1$ и построим рекуррентно последовательность по формуле

$$t_{k+1} = \sup \{t \mid t \leq t_k/2; \psi(t) \leq \psi(t_k)/2\}. \quad (5)$$

К M_1 отнесем $k=0$ и те натуральные k , для которых $t_{k-1}=2t_k$. Остальные k относим к M_2 (для них, по построению $\psi(t_{k-1})=2\psi(t_k)$). Положим далее

$$\alpha_{-1}=0, \quad \alpha_k = \psi^{-1/p}(t_k) t_k^{1/p-1}, \quad (6)$$

$$\Delta_k = \{v \mid \alpha_{k-1} \leq \max_i \mu_j(v_j) < \alpha_k\}.$$

Для $g(x) \sim \sum \gamma_v e^{i(v, x)} \in L_p$ обозначим

$$Q_k g(x) = \sum_{v \in \Delta_k} \gamma_v e^{i(v, x)}. \quad (7)$$

Тогда, если $f \in L_{p, \varphi}^{1, \mu}$, то для предельной функции $g_0(x)$ выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{k \in M_1} t_k^{1-p} |Q_k g_0(x), L_p|^p + \sum_{k \in M_2} \psi(t_k) \sum_{j=1}^m |Q_k g_0(x), L_p^{(\mu_j)}|^p = \\ = \sigma_1(g_0) + \sigma_2(g_0) \leq c |f, L_{p, \varphi}^{1, \mu}|^p. \end{aligned} \quad (8)$$

Обратно, если $g_0(x)$ такова, что $\sigma_1(g_0) + \sigma_2(g_0) < \infty$, то для функции

$$f(x, y) = \sum_{k \in M_1} Q_k g_0(x) \eta(y t_k^{-1}) + \sum_{k \in M_2} Q_k g_0(x) \eta(y t_{k-1}^{-1}), \quad (9)$$

где $\eta(t)$ — гладкая функция, равная 1 при $t \leq 1/2$ и 0 при $t \geq 3/4$, выполняется предельное соотношение (3) и неравенство

$$|f, L_{p, \varphi}^{1, \mu}|^p \leq c (\sigma_1(g_0) + \sigma_2(g_0)) \quad (10)$$

(постоянная в (8), (10) не зависит от f, g_0).

2°. Основой всех рассуждений настоящей работы является следующее утверждение, вытекающее из классической теоремы Харди — Литтлвуда о максимальной функции (2).

Лемма 1. Если $0 < T_{k+1} \leq \lambda T_k$, $\lambda < 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| T_k \sum_{s=0}^k T_s^{-1} u_s \right|^p \leq c_p (1-\lambda)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left| T_k^{-1} \sum_{s=k}^{\infty} T_s u_s \right|^p \leq c_p (1-\lambda)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p. \end{aligned} \quad (11)$$

Используются также явствующие из построения неравенства

$$c_1 \alpha_{h-1} |Q_h g(x), L_p| \leq \sum_{j=1}^m |Q_h g(x), L_p^{(\mu_j)}| \leq c_2 \alpha_h |Q_h g(x), L_p|, \quad (12)$$

где $c_1, c_2 > 0$ зависят только от p, n .

В доказательстве необходимости (неравенство (8)) мы опираемся на следующую лемму.

Л е м м а 2. Пусть $f(t)$ непрерывна и обладает (обобщенной) производной $f^{(r)}(t)$ на $(0, rt_0)$; тогда, если $0 < t_{k+1} \leq t_k/2$, то справедливо неравенство

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_k^{1-pr} \max_{0 \leq h \leq l_k} |\Delta_h^{(r)} f(0)|^p \leq c_{p,r} \int_0^{rt_0} |f^{(r)}(t)|^p dt, \quad (13)$$

где $\Delta_h^{(r)} f(t) = \sum_{\kappa=0}^r (-1)^{r-\kappa} C_r^\kappa f(t+\kappa h) - r$ -я разность функции f в точке t с шагом h .

3°. При некоторых ограничениях на весовые функции (в частности для любых неубывающих $\varphi_j(y)$) удается получить описание следов в более простой и общей форме.

В этом в следующем пункте $r \geq 1$, а весовые функции, вообще говоря, различны. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_j(t) &= \int_0^t \varphi_j(y) dy, \quad \alpha_{h,j} = 2^{h(r-1/p)} \psi_j^{-1/p}(2^{-h}), \\ \Gamma_{h,j} &= \{v \mid \mu_j(v) < \alpha_{h,j}\}, \quad \Gamma_{-1,j} = \emptyset, \quad \Gamma_h = \bigcap_{j=1}^m \Gamma_{h,j}, \\ \Delta_{h,j} &= \Gamma_{h,j} \setminus \Gamma_{h-1,j}, \quad \Delta_h = \Gamma_h \setminus \Gamma_{h-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для $g(x) \sim \sum \gamma v e^{i(v,x)} \in L_p$ пусть $Q_h g(x)$, $Q_{h,j} g(x)$, $R_h g(x)$, $R_{h,j} g(x)$ обозначают $\sum \gamma v e^{i(v,x)}$, где суммирование осуществляется соответственно по всем $v \in \Delta_h$, $v \in \Delta_{h,j}$, $v \notin \Gamma_{h-1,j}$, а $E_h g(x)$ ($E_{h,j} g(x)$) — наилучшее приближение функции $g(x)$ в метрике L_p функциями вида $\sum \beta_v e^{i(v,x)}$; $v \in \Gamma_{h-1,j}$.

Т е о р е м а 2. В указанных обозначениях пусть выполняется условие

$$\psi_j(t/2) \leq \lambda_j \psi_j(t), \quad \lambda_j < 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15)$$

Тогда, если $f \in L_{p,\varphi}^{r,\lambda}$, то для предельных функций $g_l(x)$ выполнено

$$\sum_{l=0}^{r-1} \sum_{h=0}^{\infty} 2^{h(p(r-l)-1)} |Q_h g_l(x), L_p|^p = \sigma \leq c |f, L_{p,\varphi}^{r,\lambda}|^p. \quad (16)$$

Обратно, если система функций $g_l(x)$ такова, что $\sigma < \infty$, то для функции

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^k y) \sum_{l=0}^{r-1} (l!)^{-1} (Q_h g_l(x)) \quad (17)$$

($\eta(t)$ та же, что и в теореме 1) выполняется (3) и неравенство $|f, L_{p,\varphi}^{r,\lambda}|^p \leq c\sigma$, где как и в (16) постоянная c не зависит от f, g_l .

Отметим, что теорема 2 остается справедливой, если мы заменим в выражении σ величину $|Q_k g_l(x), L_p|$ (при всех k) любой из величин

$$\sum_{j=1}^m |Q_{k,j} g_l(x), L_p|, |R_k g_l(x), L_p|, \sum_{j=1}^m |R_{k,j} g_l(x), L_p|, \quad (18)$$

$$E_k g_l(x), \sum_{j=1}^m E_{k,j} g_l(x).$$

4°. Последнее замечание, в сочетании с леммой 1 и неравенствами С. М. Никольского, оценивающими наилучшее приближение функции в метрике L_p через ее модули непрерывности (в той же метрике), позволяет в ряде случаев дать другое описание пространства следов.

Для $g \in L_p$ и натурального s пусть

$$\Delta_{h,x_j}^{(s)} g(x) = \sum_{\kappa=0}^s (-1)^{s-\kappa} C_s^{\kappa} g(x + \kappa h e_j) \quad (19)$$

(e_j — единичный орт в направлении j -й оси) есть s -я разность функции g в точке x с шагом h в направлении оси x_j , а

$$\omega_j^{(s)}(h; g) = \sup_{|t| \leq h} |\Delta_{t,x_j}^{(s)} g(x), L_p|, \quad (20)$$

$\omega_j^{(s)}$ — соответствующий модуль непрерывности.

Теорема 3. В условиях предыдущей теоремы пусть

$$\mu_j(v_j) = \mu_j(|v_j|), \quad \mu_j(2v_j) \leq A_j \mu_j(v_j). \quad (21)$$

Обозначим через $N_{j,k}$ наименьшее натуральное v_j , для которого $\mu_j(v_j) > \alpha_{k,j}$ (см. (14)). Пусть натуральные $s_{j,l}$ удовлетворяют условию

$$s_{j,l} > (\log_2 A_j) (p(r-l)-1) (pr-1+\log_2(1/\lambda_j))^{-1}. \quad (22)$$

Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы для заданной системы функций $g_i(x)$ существовала $f(x, y) \in L_{p,\varphi}^{r,l}$, связанная с $g_i(x)$ предельными соотношениями (3), является

$$\sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{k(p(r-l)-1)} (\omega_j^{(s_{j,l})}(N_{j,k}^{-1}; g_l))^p < \infty. \quad (23)$$

Указанное условие перестает, вообще говоря, быть необходимым, если для кого-нибудь $s_{j,l}$ нарушается (22).

Существенно указать на тот факт, что в случае $r=1$, $p=2$ применение равенства Парсеваля позволяет отбросить в теоремах 2, 3 ограничивающее условие (15), при этом в (22) можно считать $\lambda_j=1$. В других терминах эквивалентные условия на след в этом случае получены в ⁽¹⁰⁾.

В заключение отметим, что при условии $\mu_j(v_j) > \varepsilon > 0$ (v_j — непрерывная вещественная переменная) все результаты с соответствующими изменениями переносятся на непериодический случай ($x \in R_n$).

Автор приносит глубокую благодарность проф. Л. Д. Кудрявцеву за постоянное внимание к работе.

Куйбышевский авиационный институт

Поступило
10 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969. ² Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа, Неравенства, М., 1948. ³ Л. Д. Кудрявцев, В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972. ⁴ Г. Н. Яковлев, В сб.: Теоремы вложения и их приложения, М., 1970, стр. 225. ⁵ Л. Д. Кудрявцев, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 117, 180 (1972). ⁶ Л. Д. Кудрявцев, ДАН, т. 202, № 6, 21 (1972). ⁷ С. В. Успенский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 60, 282 (1961). ⁸ В. Р. Портнов, ДАН, т. 155, № 4, 761 (1964). ⁹ А. Kufner, Ann. Scuola Normals Super, Pisa, Cl. Sci., v. 23, f. II, 373 (1969). ¹⁰ Г. А. Калябин, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 140 (1975).