Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(74), 2012

УДК 681.3,519.688

Способ формализации объектов графовой структуры с вероятностными параметрами функционирования

Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, Ю.В. Жердецкий, Г.А. Мальцева

Предлагается способ формализации объектов графовой структуры, учитывающий динамику вероятностных параметров их элементов.
Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, стохастические матрицы, надёжность систем, цепи Маркова.

A method of formalizing graph structure objects is provided, which takes into account the dynamics of the probability parameters of their (objects') elements.
Keywords: probability-algebraic simulation, stochastic matrix, system reliability, Markov chains.

Введение

Сложные системы (СС), представляющие собой совокупность изменяющихся элементов, взаимосвязанных между собой и рассматриваемых как единое целое, обладают тем общим свойством, что на этапе формализации они представляются в виде графа, а это позволяет применить к исследованию характеристик таких систем методы теории графов. Представление СС в символьном виде позволяет произвести расчёты с использованием различных компьютерных методов, играющих роль механизма принятия решения.

В тех случаях, когда получение решений на реальном объекте дорого, сложно или, вообще, невозможно, возникает необходимость использования моделей. Модель упрощает, удешевляет и ускоряет процесс исследования оригинала. Меньшая сложность модели по сравнению с реальной ситуацией или объектом достигается тем, что модель описывает только отдельные элементы, связи и функции реального объекта, которые влияют на принимаемое решение. Сложность моделирования заключается в том, чтобы правильно выделить наиболее важные для поставленной задачи факторы и описать их влияние на объект. Как правило, не существует универсальных правил определения, какие из известных факторов объекта являются существенными для конкретного случая. Если условия моделирования позволяют, то рекомендуется построить несколько моделей с разными наборами «существенных» свойств и затем оценить их на адекватность объекту и цели моделирования, учитывая при этом, что разные схемы формализации по-разному определяют существенные структурные элементы исследуемых объектов. С другой стороны, с помощью одной и той же структурной схемы можно дать графическое описание систем из различных прикладных областей и определить функции взаимодействия их элементов в зависимости от целей и задач исследования. Именно этим определяется неоднозначность графического описания реальных объектов графовой структуры (ОГС).

Как правило, сложные системы, имеющие графовую структуру, в смысле исследуемого свойства (надёжности, производительности, стоимости функционирования) являются неоднородными. Это означает, что числовые показатели исследуемого свойства структурных элементов системы могут случайным образом изменяться в некотором (иногда достаточно большом) диапазоне.

При формализации СС в виде графа структурным элементам исследуемого ОГС с учётом особенностей решаемой задачи ставятся в соответствие рёбра или вершины [1]. Например, в случае анализа надёжности компьютерных сетей они обычно описываются графами, где ребра отображают каналы связи, а в качестве вершин выступают элементы исследуемой сети. Такими элементами могут быть рабочие станции, серверы, повторители, переключатели, маршрутизаторы или другие устройства. Очевидно, что при исследовании компьютерных сетей, относящихся к ОГС, вероятностные значения надёжности могут иметь как их узлы, так и линии связи. Поэтому нужно решать как одну группу задач, так и другую.

Таким образом, неоднородность, которая выражается в разных значениях исследуемого свойства элементов ОГС, при формализации может проецироваться как на вершины, так и на рёбра графа. Отсюда следуют разграничения в схемах формализации, методах и, соответственно, в программном инструментарии, предназначенном для расчёта вероятностных характеристик исследуемого свойства СС.

В первом случае, в случае представления элементов ОГС рёбрами графа, вершины графа представляют связи между элементами. Такая схема формализации, предполагающая учёт вероятностных характеристик рёбер при формировании вероятностных характеристик всего графа, являющегося образом СС, положена в основу логико-вероятностных методов (ЛВМ) [2]. Возможности ЛВМ ограничены числом элементов, составляющих графовую структуру, как в случае рассмотрения структурно-сложных систем (без циклов и повторений), так и в случае структурно-простых систем.

Во втором случае элементам ОГС сопоставляются вершины графа, а рёбра являются образом линий связи между выделенными элементами. В статье [3] приведён ряд примеров графовых структур, метод расчёта вероятностных характеристик надёжности которых предполагает именно такую схему формализации. Предложенный метод перекрытия ориентирован на исследование ОГС, содержащих, как правило, множество элементов с ограниченным числом соединений (степень вершин графа не превышает 3) и характеризующихся двумя (тремя) состояниями, не отличающимися по величине вероятностей для всех элементов исследуемых графовых структур. Указанные ограничения значительно снижают возможности применения метода при решении практических задач оценки надёжности.

В статье описывается *универсальный способ формализации* СС, ориентированный на применение метода вероятностно-алгебраического моделирования [4] для оценки вероятностных характеристик графовых структур, допускающий их эквивалентное преобразование из одной формы в другую. Он обеспечивает получение вероятностной оценки исследуемого свойства структурно-сложных систем (ССС) как в случае первой схемы формализации, в которой варьируются вероятностные значения рёбер графа, так и в случае второй схемы, предполагающей вероятностные изменения вершин, содержащихся в графе – образе исследуемой СС.

При исследовании структурно-простых систем (СПС) первая схема формализации, являющаяся частным случаем второй схемы, обеспечивает возможность одновременного рассмотрения вероятностных характеристик исследуемого свойства элементов системы и вероятностных функций взаимодействия между этими элементами. Эта особенность формализации обеспечивает универсальность подхода к формализации СПС и расширяет класс решаемых задач.

Классификация ОГС

Оценивая сложность формализации графовых СС, выделим два типа ОГС. К первому типу объектов графовой структуры (ОГС1) будем относить системы, имеющие явно выраженную графовую структуру. Это потоковые системы, которые в соответствии с семантикой графовой структуры могут интерпретироваться как транспортные, производственные, вычислительные и другие сети, осуществляющие перемещение единиц потока. Значительную часть потоковых систем составляют транспортные сети различного назначения, а среди них особое место занимают транспортные системы сообщения (ТСС), проблемы функционирования которых в настоящее время проявляются наиболее остро и требуют разработки математических методов, позволяющих реализовать единый подход к нахождению наиболее рационального варианта их организации. Основными классами ТСС являются автомобильные системы сообщения, железнодорожные системы сообщения, системы общественного транспорта. Кроме этого, к первому типу ОГС относятся электротехнические системы. Большинство ОГС1 являются ССС как по структуре, так и по числу несовместных состояний.

К объектам графовой структуры второго типа (ОГС2) отнесём сложные системы, выявление структуры которых требует временных и материальных затрат для реализации творческого процесса определения совокупности их элементов и описания отношений между ними. Как правило, это функционально-сложные системы (ФСС), включающие небольшое число элементов, между которыми могут быть установлены функциональные связи (пространственные или временные), позволяющие представить систему в виде графа. Сложность ОГС2 в большей степени обусловлена неоднозначностью и нетривиальностью функциональных отношений между элементами системы. Структура таких систем, как правило, представляется в виде дерева.

Примером ОГС2 с пространственными функциональными связями являются механические системы, включающие множество элементов, согласованная работа которых обеспечивает безотказное функционирование всей системы. Примером ОГС2 с временными функциональными связями являются технологические процессы, включающие операции, выполнение которых упорядочено во времени. Кроме этого, к ОГС2 с временными связями можно отнести графически представленные сценарии опасного состояния (СОС). При этом для каждого конкретного случая (от взрыва, пожара, затопления, разгерметизации в технике; потоков природных вод, экзогенных геологических процессов в природе; панике на бирже, банкротств и дефолтов в экономике и финансах) необходимо уяснить, каким образом может возникнуть ущерб «большого масштаба». Поэтому описание возможного СОС и представление его в виде графа представляет наибольшую трудность и является эвристической творческой работой, которая не имеет алгоритма [2].

Следует отметить, что классификация ОГС является условной, и с учётом уровня детализации, множества анализируемых свойств, поставленных целей и критериев оценки объекты одного типа могут быть отнесены к классу объектов второго типа.

Формальное описание сложных систем графовой структуры

Определение вероятностных характеристик исследуемого свойства СС с заданным уровнем выполнения предписанных ей функций включает решение задач определения структурного состава образующих ее элементов, установления рабочих параметров элементов, учёта процессов взаимного влияния и взаимодействия этих элементов в ходе реализации моделирования. Зачастую непосредственное изучение объекта в целом как системы невозможно из-за его сложности, и исследователь сталкивается с проблемой декомпозиции СС: «…приходится расчленять объект на конечное число частей, учитывая связи между ними, характеризующие их взаимодействие. Здесь и начинается интерпретация исследуемого объекта как сложной системы, а его частей – как подсистем» [5].

В основу формализации СС, относящихся к классу ОГС, с целью их вероятностно-алгебраического моделирования положен способ их представления в виде графовых структур, отражающих связи между элементами системы. В случае если система имеет явно выраженную графовую структуру, выбор состава элементов системы не составляет труда. Им соответствуют реальные физические объекты. При этом функциональные связи между элементами рассматриваемых систем устанавливаются с учётом физического взаимного расположения элементов, а сами функции, определяющие характер взаимодействия, описываются в соответствии с решаемой исследовательской задачей.

Для ОГС2, который составляют ФСС, необходимы методы умозрительного структурирования, позволяющие определить состав элементов системы и описать их функциональные связи. В процессе формализации этих систем выбираются существенные и исключаются тривиальные связи, на основе чего определяется состав элементов и функциональные зависимости между ними.

В обоих случаях предполагается, что система представляется совокупностью элементов $K=\{K_i\}, i=\overline{1,m}$. Число элементов выделяется в соответствии с уровнем детализации изучаемого объекта. Это могут быть как неделимые элементы, представляющие самый высокий уровень детализации СС, так и подсистемы, включающие совокупность неделимых элементов, которые рассматриваются как самостоятельные неделимые элементы системы выбранного уровня абстрагирования.

Элементы характеризуются численными значениями совокупности параметров, которые изменяются в процессе функционирования системы и определяют несовместные состояния исследуемого свойства элементов. То есть состояние элемента характеризуется перечнем (обычно статическим) характеристик данного объекта и текущими (обычно динамическими) значениями каждого из этих свойств. В произвольный момент времени элемент с некоторой вероятностью может находиться в одном из этих состояний.

При анализе вероятностных характеристик реальных систем не всегда достаточно рассмотрения двух состояний (1 и 0). Следует иметь в виду, что состояния могут характеризовать различные уровни износа элементов, соответствовать различным видам отказов или определять возможные значения исследуемого свойства, имеющего вероятностную природу. В общем случае число состояний исследуемого свойства элементов задаётся множеством:

$$S = \{S_j\},\ j = \overline{0,n}, \tag{1}$$

которое формируется с учётом особенностей объекта исследования и степени его детализации.

Описание сложных систем графовой структуры допускает рассмотрение различного числа состояний для выделенных элементов и системы в целом. Такая ситуация может соответствовать приобретению системой некоторых новых свойств, которые не характерны для ее отдельных элементов, или описывать случай, когда исследуемое свойство системы характеризуется большим числом значений параметра, определяющим её состояния, чем её отдельно взятые элементы.

Предполагается, что вероятности состояний известны и задаются векторами:

$$P^i = (p_0^i, p_1^i, \ldots, p_n^i), \sum_{j=0}^{n} p_j^i = 1, i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Вектор вероятностей состояний является более информативным в смысле описания показателя исследуемого свойства системы, чем одно его значение. Он даёт целую линейку значений и их вероятности для выбранного показателя, характеризующего исследуемое свойство системы.

Предполагается, что система функционирует циклически и за определённый интервал времени выполняет некоторую функцию, которая обеспечивается согласованной работой всех элементов системы.

Связи между элементами системы зависят от решаемой задачи и отличают её от простого набора частей. Они формализуются с учётом отношений между элементами системы, установленными при решении задачи декомпозиции системы, и задаются функциями $F = \{F_j\}, j = \overline{1,z}$, которые могут быть как детерминированными, так и вероятностными. В случае детерминированных функций состояния системы однозначно определяются состояниями её исходных элементов. При случайном характере взаимодействия элементов используются вероятностные функции, позволяющие по установившимся состояниям исходных элементов определить вектор возможных состояний системы и их вероятности. Функциональные связи определяют условия функционирования системы, при которых различные сочетания уровней исследуемого свойства элементов обеспечивают определённый уровень исследуемого свойства всей системы.

Выделенные компоненты $K = \{K_i\}, i = \overline{1,m}$ и функциональные связи между ними $F = \{F_j\}, j = \overline{1,z}$ задают структуру графа исследуемой системы. Для ССС возможны два варианта формирования графовых структур.

Вариант 1. Схема формализации «элементы-рёбра». Выделенным элементам $K = \{K_i\}, i = \overline{1,m}$ сопоставляются рёбра графа, а вершины определяют места связи выделенных элементов. Будем считать, что структура системы задаётся графом *G(N,K)*, где $N = \{N_v\}, v = \overline{1,l}$ – конечное множество вершин, $K = \{K_i\}, i = \overline{1,m}$ – множество ребер, для которых указаны пары вершин, которые это ребро соединяют. На рисунке 1 представлена схема

ССС, которая в области электротехники называется структурой двух «звезд», включенных на «треугольник» [2].

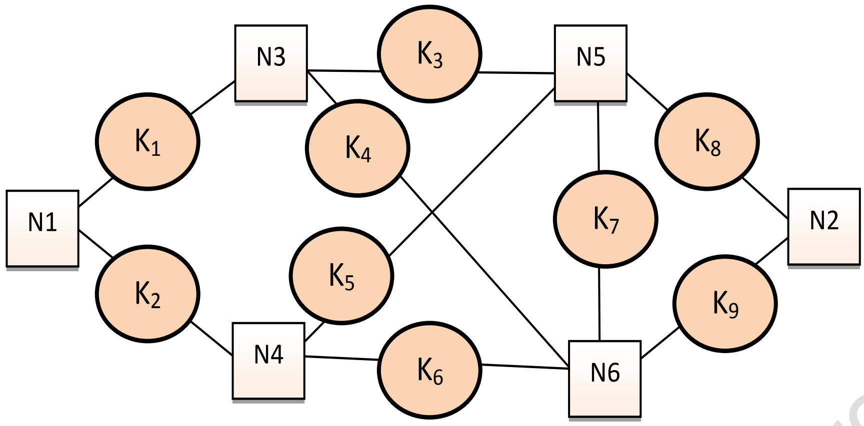

Рисунок 1 – Схема формализации ССС «элементы-рёбра»

Из множества вершин графа выделяется две вершины, определяющие вход в систему ($N_1 \in N$) и выход из неё ($N_2 \in N$).

Вариант 2. Схема формализации ССС «элементы-вершины». Элементам $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{K}_i\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{m}}$, образующим в совокупности ССС, сопоставляются вершины графа, а рёбра определяют линии связи между ними. В этом случае структура системы задаётся графом *G(K,N)*, где $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{K}_i\}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{m}}$ – множество вершин, отображающих элементы, а $N = \{N_v\}, v = \overline{1,l}$ – конечное множество ребер. Пример графа, построенного с использованием указанной схемы формализации, представлен на рисунке 2. Очевидно, что при этой схеме формализации будут оцениваться вероятностные характеристики функционирования другой ССС, включающей только 6 элементов.

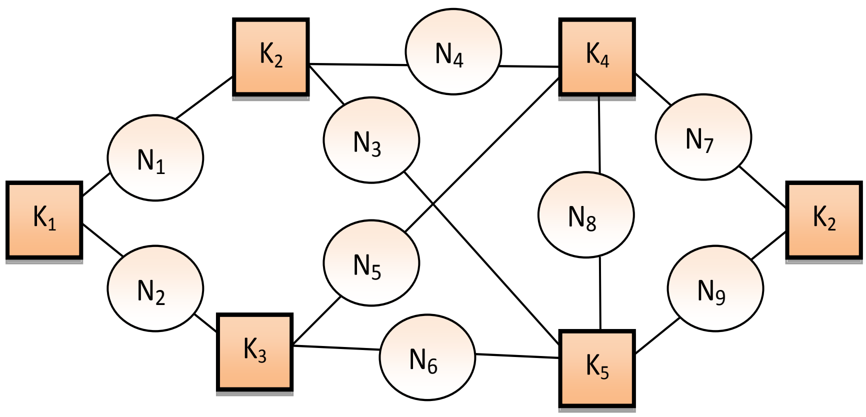

Рисунок 2 – Схема формализации ССС «элементы-вершины»

Из множества вершин графа выделяется две вершины, определяющие вход в систему ($K_1 \in K$) и выход из неё ($K_2 \in K$).

Для структурно-простых систем на основе выделенной совокупности элементов системы $K = \{K_i\}, i = \overline{1,m}$ и функциональных отношений между ними $F = \{F_j\}, j = \overline{1,z}$ разрабатывается графическая схема *G(F,K),* представляющая собой древовидную структуру, отражающую связи между элементами (рисунок 3).

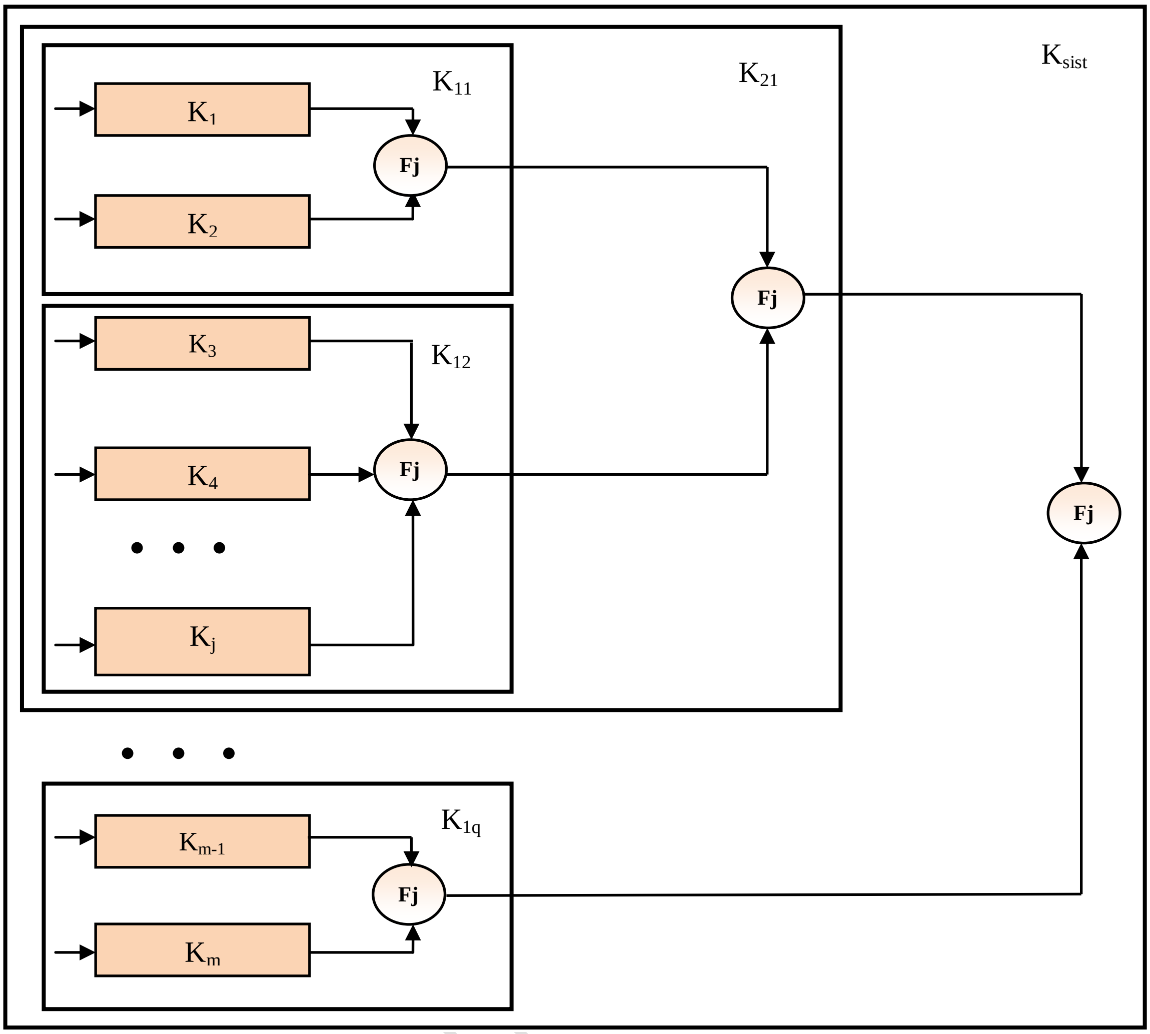

Рисунок 3 – Графическое представление связей между элементами СПС

На схеме F_j обозначает множество вершин, определяющих связи между элементами системы, $\{K_{ig}\}$ – множество рёбер, соответствующих структурным блокам (подсистемам) системы разного уровня детализации. Элементы $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ представлены листьями дерева.

Графическая схема является аналитически точным и строго формализованным отображением знаний о том, какие элементы выделены в процессе формализации и какие отношения между ними возникают в процессе её функционирования. Ставится задача определения вектора вероятностей состояний исследуемого свойства СС по вероятностным значениям исследуемого свойства её элементов:

$$P^s = (p_0^s, p_1^s, ..., p_n^s), \sum_{j=0}^{n} p_j^s = 1. \tag{3}$$

Таким образом, обоснованное и целенаправленное разделение исследуемой системы на взаимосвязанные элементы и установление функциональных связей между ними обеспечивает формальное описание системы для последующего моделирования исследуемого свойства системы. Выделенные элементы $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ и функциональные связи между ними $F = \{F_j\}, j = \overline{1, z}$ задают структуру графа исследуемой СС. Вероятностные характеристики элементов (2), принимающие числовые значения, являются параметрами расчётных вероятностно-алгебраических моделей исследуемой системы. Вероятностные характеристики всей системы (3) являются откликами моделирования.

При рассмотрении объекта исследования в динамике выделяются следующие аспекты отображения процесса функционирования СС. *Во-первых,* необходимо учитывать динамическое изменение состояний выделенных элементов $K = \{K_i\}, i = \overline{1,m}$. Для учёта динамического изменения характеристик выделенных состояний элементов СС предлагается использовать Марковские модели с дискретными состояниями, различные формы которых в ряде случаев адекватно описывают происходящие процессы.

*Во-вторых***,** при моделировании следует учесть, что состояния отдельных элементов не только определяют состояние всей системы, но и в большинстве случаев решающим образом влияют на состояние остальных элементов, например, ускоряя процесс изменения их состояний (в смысле исследуемого свойства).

В-третьих, зачастую в реальных системах изменения состояний элементов достигают критического уровня и требуются корректирующие воздействия на параметры моделирования, включающие не только замену и реконструкцию отдельных элементов, но и обновление структурной организации всей системы на исследуемом текущем временном интервале.

Для отображения в модели особенностей изменения исследуемого свойства элементами используются эвристические продукционные правила, антецедент которых определяет условие, касающееся параметров предметной области, а консеквент задаёт управляющее действие, направленное на коррекцию процесса моделирования. В общем виде правила имеют следующий вид:

«**If** [X *log_op* D] **then** [Y», (4)

где X – значения вектора вероятностей или его статистических характеристик (математического ожидания, дисперсии) для контролируемого элемента; D – константа, определяющая допустимые значения либо вектора, либо его статистической характеристики; Y – действие по изменению параметров моделирования; *log_op* – логический оператор, который принимает одно из значений множества $\{=,<,>,\leq,\geq,\neq\}$.

Для контроля параметров совокупности элементов используются правила, включающие логические связки. Они имеют вид:

If [[X1 *log_op* D1], *log_svz* … ,*log_svz*[Xn *log_op* Dn]] **then** [Y], (5)

где *log_svz* – логическая связка, которая принимает одно из значений множества $\{= \wedge,\vee,\neg\}$.

В соответствии с экспертными оценками, которые определяют направление управляющих воздействий (Y), правила разделяются на три типа, определяющих вид и степень вносимых изменений. Простейшие правила (тип A), в случае их срабатывания, указывают на изменение вероятностных параметров структурных элементов модели, которые задаются векторами (2). При этом могут контролироваться как изменения отдельных элементов модели, так и структурных единиц, объединяющих группы смежных элементов. Структурные изменения графа модели определяются правилами группы типа B. В этом случае корректирующие воздействия реализуют процесс адаптации графовой структуры модели под текущие изменения параметров исследуемого свойства элементов и всей системы [6]. Наконец, правила группы C направлены на отражение изменения режима эксплуатации элементов, который описывается с использованием одной из форм Марковских моделей.

В целом совокупность правил вида (2.5), управляющих ходом моделирования, имеет вид:

$$\begin{cases} R1: & if & [X11 & \log\_op & D11] & \log\_svz & [X12 \log\_op & D12] & ... & then & Y11 \\ R2: & if & [X21 & \log\_op & D21] & \log\_svz & [X22 \log\_op & D22] & ... & then & Y21 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ Rn: & if & [Xn1 & \log\_op & Dn1] & \log\_op & [Xn2 \log\_op & Dn2] & ... & then & Yn1 \end{cases} \quad (6)$$

На вход динамического моделирования подаются вектора вида:

$$P^{it} = (p_0^{it}, p_1^{it}, ..., p_n^{it}), \sum_{j=0}^{n} p_j^{it} = 1, i = \overline{1,m}, t = \overline{1,T}\,. \quad (7)$$

Результатом динамического моделирования являются вектора вероятностей состояний, характеризующих изменения исследуемого свойства системы во времени:

$$P^{st} = (p_0^{st}, p_1^{st}, ..., p_n^{st}), \sum_{j=0}^{n} p_j^{st} = 1, t = \overline{1,T}. \qquad (2.9)$$

Они позволяют судить об изменении свойства системы в процессе её эксплуатации, определять режим её функционирования и стратегию динамического управления параметрами элементов, характеризующими исследуемое свойство.

Таким образом, формализация динамически изменяющейся СС с целью её вероятностного анализа включает следующие действия: выделение элементов $K = \{K_i\}, i = \overline{1,m}$, построение её графовой схемы с выделением её вероятностно-изменяющихся структурных составляющих, задание множества функций $F = \{F_j\}, j = \overline{1,z}$, описывающих отношения между выделенными элементами и определяющих структурные коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования, выбор способа вероятностного изменения элементов и задание специфической функции управления процессом моделирования (U) в виде совокупности продукционных правил, позволяющей реализовать во времени корректирующие воздействия на процесс моделирования.

Заключение

Предложенная схема формализации ОГС характеризуется следующими свойствами: иерархия графического представления ОГС; однотипность описания элементов разного уровня иерархии; типизация связности элементов; преобразуемость графовых структур.

Следует отметить, что более общим представлением СС является её формализация в виде графа с вероятностными значениями вершин, характеризующими исследуемое свойство её структурных элементов. При этом связи между элементами считаются детерминированными в смысле исследуемого свойства и представляются рёбрами графа. Это объясняется тем, что любая графовая структура с вероятностными значениями рёбер всегда может быть преобразована в графовую структуру с вероятностными значениями вершин, но не всякий граф с вероятностными вершинами может быть преобразован в структуру с вероятностными рёбрами.

Литература

1. Сукач, Е.И. О различных подходах к исследованию вероятностных характеристик надёжности сетевых структур / Е.И. Сукач // Шестая научно-практическая конференция «Математическое и имитационное моделирование систем. МОДС'2011», 27–29 июня 2011 г. – Чернигов, 2011. – С. 154–156.
2. Рябинин, И.А. Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / А.И. Рябинин. – СПб. : изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.
3. Sahinoglu, M. Network reliability evaluation / M. Sahinoglu, R. Benjamin // Wiley Interdisciplinary Reviews : Computational Statistics. – Vol. 2 March/April, 2010. – P. 189–211.
4. Сукач, Е.И. Метод вероятностно-алгебраического моделирования надёжности функционально-сложных систем / Е.И. Сукач // Информатика. – 2010. – № 3. – С. 18–30.
5. Бусленко, Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М. : Наука, 1978. – 395 с.
6. Сукач, Е.И. Метод перераспределения автомобильных транспортных потоков региона на основе имитационного моделирования / Е.И. Сукач // Реєстрація, зберігання і обробка даних (Data Recording, Storage & Processing). – 2008. – Т. 10, № 3. – С. 37–45.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 19.09.12