

А. Г. НИКОГОСЯН, Г. А. АРУТЮНЯН

ОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПРИ ОБЩЕМ ЗАКОНЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 4 V 1976)

Как известно, при решении задач переноса лучистой энергии в спектральной линии возникает необходимость учета перераспределения излучения по частотам, а поле излучения приходится искать для всех частот одновременно. Математические трудности, возникающие при рассмотрении диффузии резонансного излучения с реальным законом перераспределения по частотам, а также стремление выявить хотя бы в общих чертах роль процесса перераспределения заставляли прибегать к различным упрощающим предположениям. Общепринятым упрощением является предположение о полном перераспределении по частотам, заключающееся в допущении отсутствия корреляции между частотами поглощенного и излученного квантов. Теория образования спектральных линий в рамках указанного предположения развита достаточно хорошо, главным образом благодаря работам В. В. Соболева, Д. Хаммера, В. В. Иванова. Сравнительно мало исследован случай диффузии излучения с истинным законом перераспределения, а также вопросы, касающиеся области применения и точности предположения о полном перераспределении по частотам.

В серии работ (¹⁻³), выполненных одним из авторов настоящей статьи совместно с Н. Б. Енгибаряном, был развит новый подход к решению задач переноса при истинном законе перераспределения. Отправным пунктом этих исследований служило представление функции перераспределения в виде

$$r(x', x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \alpha_k(x) \alpha_k(x'), \quad (*)$$

где $\{\alpha_k(x)\}$ — некоторая, ортонормированная в том или ином смысле, система функций; A_k — неотрицательные постоянные.

Ниже мы покажем, что указанный подход позволяет относительно легко определить контуры линий поглощения в случае изотермической атмосферы, причем объем вычислений, необходимый для достижения удовлетворительной, с точки зрения практических применений, точности, отнюдь не превосходит объема вычислений в случае полного перераспределения по частотам. Как мы убедимся, принципиальных затруднений при этом также не возникает.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда закон перераспределения определяется лишь тепловым движением атомов.

В этом случае, как известно,

$$r(x', x) = \int_{\max(|x|, |x'|)}^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (1)$$

Представление (*) для этого закона удобнее получить разложением $r(x', x)/\alpha(x)$ по собственным функциям, где $\alpha(x)$ — профиль коэффици-

ента поглощения, равный здесь $\exp(-x^2)$. Тогда

$$\alpha_k(x) = (-1)^k \sqrt{\pi} \exp(-x^2) H_k(x), \quad A_k = 1/(2k+1), \quad (2)$$

где через $H_k(x)$ обозначен полином Эрмита k -й степени. Нетрудно убедиться, что $\{\alpha_k(x)\}$ представляет собой систему функций, ортогональных с весом $\exp(x^2)$.

Как известно (⁶, ⁷), интенсивность излучения, выходящего из среды при равномерном распределении источников, $R(x)$ связана с отражательной способностью среды простым соотношением, которое в одномерном случае имеет вид

$$R(x) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', x) dx'. \quad (3)$$

Коэффициент отражения $\rho(x', x)$ имеет следующий вероятностный смысл: $\rho(x', x) dx$ есть вероятность того, что излучение, падающее на среду с частотой x' , отразится от нее в интервале частот $x, x+dx$. Применением принципа инвариантности Амбарцумяна для функции $\rho(x', x)$ можно получить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} [\alpha(x) + \alpha(x')] \rho(x', x) = & r(x', x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'') r(x'', x') dx'' + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x'') \rho(x'', x') dx'' + & \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'') dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', x''') \rho(x''', x') dx'''. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, пользуясь разложением (*), для функции $\rho(x', x)$ будем иметь

$$\rho(x', x) = \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\varphi_m(x) \varphi_m(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')}, \quad (5)$$

$$\varphi_n(x) = \alpha_n(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', x) \alpha_n(x') dx'. \quad (6)$$

Таким образом, вопрос об определении функции $\rho(x', x)$, а вместе с нею и контуров линий поглощения сводится к решению бесконечной системы функциональных уравнений для $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \alpha_n(x) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x) \varphi_m(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')} \alpha_n(x') dx', \quad n=0, 1, \dots \quad (7)$$

При приближенном решении система (7) заменяется соответствующей укороченной системой, причем порядок приближения N определяется количеством уравнений, которым мы при этом ограничиваемся. В частности, если берется лишь первое уравнение, а в сумме (5) — первое слагаемое, то мы приходим к случаю полного перераспределения по частотам.

При численных расчетах обращает на себя внимание сравнительно медленное повышение точности при переходе к приближениям более высокого порядка, что обусловлено медленной сходимостью ряда (*), соответствующего функции перераспределения (1) (члены этого ряда убывают как $k^{-1/2}$). Наглядное представление об этом можно получить, например, из значений величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho(0, x) - \rho_N(0, x)| dx \quad \Bigg/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(0, x) dx$$

(при $\lambda=0,7$), которые в первых четырех приближениях соответственно равны 0,21; 0,13; 0,105; 0,086.

В связи с этим, возникает естественный вопрос, нельзя ли повысить точность получаемых результатов, не прибегая при этом к приближениям высоких порядков, что сопряжено с резким возрастанием объема производимых вычислений. Чтобы ответить на поставленный вопрос, исследуем зависимость правой части системы (6) от индекса n . Пользуясь асимптотическим представлением полиномов Эрмита для больших значений индекса n , а также первой из формул (2), мы приходим к следующей асимптотической формуле для функций $\alpha_n(x)$:

$$\alpha_n(x) \sim n^{-1/4} \exp(-x^2/2) \cos[(4n+1)^{1/2}x - n\pi]. \quad (9)$$

Обращаясь, далее, ко второму слагаемому в правой части (6), заметим, что при весьма широких предположениях относительно функции $f(x)$ ($f(x)$ — кусочно-непрерывная функция во всяком конечном интервале $(-a, a)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 \exp(-x^2) f^2(x) dx$ имеет конечное значение) имеет место (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \alpha_n(x) dx = 0. \quad (10)$$

Исходя из физических соображений, можно заключить, что функция $\rho(x', x)$ удовлетворяет условиям достаточным для выполнения (10). Таким образом, при больших значениях индекса n функции $\varphi_n(x)$ и $\alpha_n(x)$ будут отличаться друг от друга сколь угодно мало.

Зависимость функций $\varphi_n(x)$ от порядка приближений весьма слабая, поэтому переход от приближения одного порядка к другому можно представить как дополнение системы $\{\varphi_n(x)\}$ новыми функциями.

Приведенные соображения указывают на возможность замены при больших значениях индекса n функций $\varphi_n(x)$ в формуле (5) соответствующими известными функциями $\alpha_n(x)$, что позволит просуммировать ряд (5) без обращения к приближениям высоких порядков. Уже для сравнительно небольших N подобное «исправление» приводит к резкому повышению точности. Так, приведенная выше величина (8) после надлежащего «исправления» оказывается равной 0,044 при $N=1$, 0,013 при $N=2$ и 0,009 при $N=3$. Разумеется, с большой точностью определяются при этом и контуры линий поглощения.

Здесь мы укажем еще на одну возможность построения приближенного решения, отличающуюся исключительной простотой и точностью. Она обусловлена тем, что замену $\varphi_n(x)$ соответствующими функциями $\alpha_n(x)$ при больших значениях индекса n можно произвести в самой системе уравнений (7), сведя тем самым ее решение к решению новой системы уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_n^*(x) = & \alpha_n(x) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{N-1} A_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m^*(x) \varphi_m^*(x') - \alpha_m(x) \alpha_m(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')} \alpha_n(x') dx' + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(x', x)}{\alpha(x) + \alpha(x')} \alpha_n(x') dx', \quad n=0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (11)$$

Уже при $N=1$ полученные результаты обладают точностью, достигаемой после «исправления» в седьмом-восьмом (в зависимости от значения λ) приближениях. Поэтому в подавляющем большинстве практических случаев вместо решения системы (7) можно довольствоваться рассмотре-

нием уравнения

$$\begin{aligned}\varphi_0^*(x) = \alpha_0(x) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0^*(x) \varphi_0^*(x') - \alpha_0(x) \alpha_0(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')} \alpha_0(x') dx' + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(x', x)}{\alpha(x) + \alpha(x')} \alpha_0(x') dx',\end{aligned}\quad (12)$$

решение которого по трудности и объему вычислений не превосходит решение аналогичного уравнения, соответствующего случаю полного перераспределения по частотам.

Сравнение найденного описанным методом решения $\rho(x', x)$ со случаем полного перераспределения приводит к интересным результатам. Оказывается, что указанные две функции обладают различным асимптотическим поведением при больших значениях одного из аргументов, в центральных же частотах в случае, когда один из аргументов отличен от нуля, приближение полного перераспределения не в состоянии даже качественно описать поведения истинного закона отражения.

Из уравнения (4) нетрудно выявить асимптотическое поведение крыльев линий поглощения при истинном законе перераспределения. В данном случае $1-R(x)$ убывает не быстрее, чем x^{-2} , в то время как при полном перераспределении по частотам указанная величина с увеличением x убывает, как $x \exp(-x^2)$. Указанное различие в асимптотическом поведении крыльев спектральных линий приводит к существенным различиям в эквивалентных ширинах.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук АрмССР

Поступило
9 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Б. Енгибарян, *Астрофизика*, т. 7, 573 (1971). ² Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, т. 8, 71 (1972). ³ Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, т. 8, 213 (1972). ⁴ Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, т. 9, 79 (1973). ⁵ N. B. Yengibarian, A. G. Nicoghossian, *J. Quant. Spectroscop. Rad. Transfer*, v. 13, 787 (1973). ⁶ В. В. Соболев, *ДАН*, т. 209, 1071 (1973). ⁷ В. В. Соболев, *Астрофизика*, т. 9, 515 (1973). ⁸ Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, М., 1958.