

А. Г. РУТКАС

К ТЕОРИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 III 1976)

1°. Известно, что в построении спектральной теории операторов и их функциональных моделей важную роль играет характеристическая функция (х.ф.)

$$W(\lambda) = I - iJ\Gamma^*(T - \lambda I)^{-1}\Gamma \quad (1)$$

оператора T , учитывающая отклонение T от самосопряженного оператора и определяющая полную систему его инвариантов. Функция (1) тесно связана с теорией рассеяния и частотными характеристиками линейных систем (¹⁻⁷).

Ниже рассматривается характеристическая функция пучка $\lambda A + B$ ограниченных операторов, обобщающая понятие х.ф. оператора T (1). В то время как множество х.ф. $W(\lambda)$ (1) незамкнуто относительно равномерного предельного перехода в заданной области и ограничено условием нормировки $W(\infty) = I$, х.ф. пучков свободны от этих недостатков. Дается аналитическое описание введенного класса х.ф., устанавливаются связи с различными типами х.ф., теоремы умножения и деления. Для пучка класса М. В. Келдыша (⁸) получена теорема о разложении х.ф. пучка в бесконечное произведение простейших множителей типа Бляшке — Потапова (⁹).

2°. Операторы J, Γ в (1) определяются по мнимой части $T \in [H, H]$:

$$а) T - T^* = iJ\Gamma\Gamma^*; \quad б) J = J^* = J^{-1} \in [E, E], \quad (2)$$

так что для построения х.ф. оператора T используется набор трех операторов на двух пространствах, названный в (^{2, 4}) операторным узлом. Условие (2), а) эквивалентно J_0 -унитарности оператора V в пространстве $H \oplus H \oplus E$, где

$$V = \begin{pmatrix} I - iT\Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & J\Gamma^* & I \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Переходя к общему виду оператора V , введем следующее

О п р е д е л е н и е. Узлом для пучка $\lambda A + B$ (или Π -узлом) называется совокупность

$$\beta = \{V; X, E^-(J^-); Y, E^+(J^+)\} \quad (4)$$

гильбертовых пространств $X, Y, E^\pm$, сигнатурных операторов $J^\pm$ в $E^\pm$ и (J_0^-, J_0^+) -унитарного оператора $V: X \oplus X \oplus E^- \rightarrow Y \oplus Y \oplus E^+$, где

$$V = \begin{pmatrix} A & B & \Gamma \\ C & D & \Psi \\ M & N & K \end{pmatrix}, \quad J_0^\pm = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^\pm \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Предполагается, что пучок $(\lambda A + B): X \rightarrow Y$ вполне обратим при некотором λ (для определенности — из правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$); любой такой пучок можно включить в Π -узел β (4), (5).

Характеристической для пучка $\lambda A+B$ (или Π -узла β) называется функция

$$S(\lambda) = S_\beta(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} \Gamma \quad (6)$$

с областью определения $\rho_\beta = \{\lambda, (\lambda A + B)^{-1} \in [Y, X]\}$, построенная по блокам оператора V (5) узла β .

Лемма. *Х.ф. $S(\lambda)$ узла (4) принимает значения, J -сжимающие в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и J -унитарные на оси $\operatorname{Re} \lambda = 0$.*

Функция (6) называется нормированной в точке $v \in \rho_\beta$, если $S(v) = K$. Х.ф. (1) несамосопряженного оператора T является нормированной в бесконечно удаленной точке х.ф. Π -узла специального вида (3) (для пучка $\lambda I - iT$).

3°. Теорема 1. *Для того чтобы принимающая значения из $[E^-, E^+]$ функция $S(\lambda)$, голоморфная в произвольной области $\mathcal{G}$, была характеристической функцией некоторого Π -узла с сигнатурами $J^\pm$ в $E^\pm$, необходимо и достаточно*, чтобы ядра*

$$\begin{aligned} \Phi^-(\lambda, \mu) &= \frac{J^- - S^*(\mu) J^+ S(\lambda)}{\lambda + \bar{\mu}}, \\ \Phi^+(\lambda, \mu) &= \frac{J^+ - S(\lambda) J^- S^*(\mu)}{\lambda + \bar{\mu}}, \end{aligned} \quad (7)$$

были неотрицательно определенными при $\lambda, \mu \in \mathcal{G}$.

Преобразование полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ в круг $|\xi| < 1$

$$\xi = \xi(\lambda) = (\lambda - v)(\lambda + \bar{v})^{-1} \quad (8)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом х.ф. пучков, заданных в окрестности точки $\lambda = v$, и классом х.ф. вида

$$\theta(\xi) = T_0 - \xi F^+ (I - \xi T^*)^{-1} G, \quad (9)$$

строющихся по отклонению оператора T от унитарного (⁴, ³) и заданных в окрестности точки $\xi = 0$. Поскольку функция (9) нормирована в нуле значением $T_0 = \theta(0)$, многообразие представлений заданного сжатия $S(\lambda)$ в виде х.ф. (6) богаче многообразия представлений соответствующего сжатия в виде х.ф. (9) — за счет ненормированных ни в одной точке х.ф. Π -узлов. Во многих приложениях это весьма существенно: в (⁶) и других работах показано, как для электрических цепей и кристаллических структур по исходным уравнениям выписывается Π -узел, х.ф. которого в общем случае ненормирована и совпадает с волновой функцией прохождения или отражения (рассеяния). При этом переход к представлению (9) в круге не естествен с физической точки зрения.

Следствие. *Если последовательность х.ф. сходится равномерно в заданной области $\mathcal{D}$, то для всякой точки v в $\mathcal{D}$ существует окрестность, в которой предельная функция совпадает с х.ф. некоторого пучка.*

4°. Для приложений важны теоремы умножения и деления Π -узлов и их х.ф. (⁴, ⁶, ¹¹). Произведением Π -узлов

$$\beta_n = \{V_n; X_n, E_n^-(J_n^-); Y_n, E_n^+(J_n^+)\}, \quad (10)$$

у которых $E_1^+(J_1^+) = E_2^-(J_2^-)$, называется совокупность (4), где

$$E^-(J^-) = E_1^-(J_1^-), \quad E^+(J^+) = E_2^+(J_2^+), \quad X = X_1 \oplus X_2,$$

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad V = (I_{Y_1 \oplus Y_1} \oplus V_2)(V_1 \oplus I_{X_2 \oplus X_2}).$$

* Утверждение достаточности понимается, вообще говоря, локально: в некоторой окрестности каждой точки указывается х.ф., совпадающая с $S(\lambda)$.

Теорема 2. Произведение $\beta = \beta_2 \beta_1$ узлов (10) есть Π -узел. При этом х.ф. перемножаются:

$$S_\beta(\lambda) = S_{\beta_2}(\lambda) \cdot S_{\beta_1}(\lambda), \quad \lambda \in \rho_{\beta_1} \cap \rho_{\beta_2},$$

а пара подпространств (X_2, Y_2) инвариантна* относительно операторов A, B, C, D — главных блоков отображения V (5).

Теорема 3. Пусть даны Π -узел β (4) и такая пара подпространств (X_2, Y_2) , инвариантная относительно главных блоков A, B, C, D оператора V (5), что индуцированный пучок $(\lambda A + B) |_{X_2} = (\lambda_2 A_2 + B_2) \in [X_2, Y_2]$ вполне обратим хотя бы в одной точке λ .

Тогда существует разложение узла** β на множители-узлы β_n вида (10): $\beta = \beta_2 \beta_1$. Общий вид произвольного разложения $\beta = \beta_2 \beta_1$ на узлы

$$\beta_n = \{V_n; X_n, E_n^-(J_n^-); Y_n, E_n^+(J_n^+)\}$$

описывается соотношениями

$$V_1 = (I_{Y_1 \oplus Y_1} \oplus U) V_1; \quad V_2 = V_2 (I_{X_2 \oplus X_2} \oplus U^+),$$

где $U: E_1^+ \rightarrow E_1^+$ суть (J_1^+, J_1^+) -унитарный оператор.

Одно из разложений узла β на множители можно найти, полагая

$$X_1 = X \ominus X_2, \quad E_1^+ = E_2^- = V(X_1 \oplus X_1 \oplus E^-) \ominus (Y_1 \oplus Y_1).$$

З а м е ч а н и е. Из теорем 2, 3 вытекают соответствующие правила умножения и деления х.ф. вида (4), изложенные в (2, 4).

Для построения пары подпространств (X_2, Y_2) , инвариантной относительно блоков A, B оператора V (5) из узла β , можно воспользоваться интегрированием по контуру, охватывающему изолированную компоненту спектра пучка $\lambda A + B$ — ср. (12). Если полученная пара (X_2, Y_2) не инвариантна относительно блоков C, D (5), то легко перейти к Π -узлу, имеющему одинаковую с β х.ф. и удовлетворяющему всем условиям теоремы 3. Используя этот переход, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 4. Х.ф. $S(\lambda)$ пучка класса М. В. Келдыша в каждой точке области определения представляется сильно сходящимся бесконечным произведением

$$S(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n S_i(\lambda) K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda P_i + Q_i}{\lambda + \lambda_i} K_n, \quad (11)$$

где λ_n — собственные числа пучка; $S_i(\lambda)$ — принимающие значения из $[E^+, E^+]$ характеристические функции пучков, действующих в одномерных пространствах; K_n — J -сжатия из E^- в E^+ .

В частных случаях (соответственно при $\dim E^- = 1$ и $\dim E^- < \infty$) разложение (11) превращается в дискретное произведение Бляшке или Бляшке — Потапова (9).

При весьма естественных условиях утверждение теоремы 4 обратимо: если некоторая х.ф. пучка $\lambda A + B$ раскладывается в произведение (11), то пучок обладает полной системой собственных и присоединенных векторов.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
29 III 1976

* То есть $A(X_2) \subset Y_2, \dots, D(X_2) \subset Y_2$.

** Соответственно х.ф. узла β раскладывается на множители.

- ¹ Д. З. Аров, Функц. анализ и его прилож., т. 8, в. 4 (1974).
- ² М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1969.
- ³ П. Д. Лакс, Р. С. Филлипс, Теория рассеяния, М., «Мир», 1971.
- ⁴ М. С. Лившиц, Операторы, колебания, волны, «Наука», 1966.
- ⁵ Н. К. Никольский, Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974.
- ⁶ А. Г. Руткас, Н. И. Хиргий, Теория функций, функциональный анализ, в. 19, Харьков, 1973.
- ⁷ Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1970.
- ⁸ М. В. Келдыш, ДАН, т. 71, № 1 (1951).
- ⁹ В. П. Потанов, Тр. Московск. матем. общ., т. 4 (1955).
- ¹⁰ В. М. Бродский, ДАН, т. 198, № 1 (1971).
- ¹¹ А. Г. Руткас, Укр. матем. журн., т. 22, № 1 (1970).
- ¹² Н. И. Раббель, Вестн. Харьковск. ун-та, мех.-матем. сер., в. 39 (1974).