

С. А. АПРЕСЯН

**ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИДЕАЛОВ
В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 30 III 1976)

1.1. Проблема локализации идеалов: а) описать алгебры A функций, регулярных в открытом множестве Ω , $\Omega \subset \mathbb{C}$, в которых все идеалы I , $I \subset A$, являются закрепленными (локализованными) или локальными (определяются своими нулями); б) если алгебра A не обладает упомянутыми свойствами, указать (на языке, определяющем алгебру A) критерий того, что некоторая совокупность функций из A порождает закрепленный или локальный идеал. Алгебра A наделяется топологией, мажорирующей топологию пространства $A(\Omega)$ всех функций, аналитических в Ω (топологию компактной сходимости), а идеал I считается замкнутым. Если $k_f(\xi)$ — кратность нуля функции f , $f \in A(\Omega)$, в точке ξ , $\xi \in \Omega$, то локализуемость идеала I , $I \neq A$, означает, что $k_I(\xi) = \min_{f \in I} k_f(\xi) \neq 0$, а его локальность, — что $I = I_{k_I} = \{f \in A: k_f \geq k_I\}$.

Сформулированная проблема тесно связана с широким кругом (иногда определяющих) задач нескольких дисциплин — от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа. Вместе с тем исследование локальности идеалов неотделимо от важнейших внутренних задач теории функций — изучения мультипликативной структуры аналитических функций (факторизационные теории Вейерштрасса, Неванлинны — Рисса — В. И. Смирнова, М. М. Джрбашяна), теорем единственности и оценок снизу модуля аналитических функций. О связи этих задач с проблемой локализации см. (1).

Упомянутые оценки снизу — наиболее тяжелая аналитическая часть теорем о локализации. Именно отсутствием таких оценок объясняется тот факт, что многие результаты о локализации носят «условный» характер, например: если идеал I содержит ограниченное семейство функций V , огибающая которого $\sup_{f \in V} |f(\xi)|$ «достаточно велика», то $I = I_{k_I}$ (Л. Валбрук, Л. Хермандер, Ж.-П. Феррье и др., см. (2)). В других работах (Л. Шварц, А. Ф. Леонтьев, А. Берлинг, И. Ф. Красичков, Н. К. Никольский, В. А. Ткаченко; см. об этом (1)) авторы опираются на достаточно сильные оценки снизу и их теоремы свободны от упомянутой «условности». В (3) предложен метрический подход к проблеме локализации: даны пространства X , Y ($X \subset Y \subset A(\Omega)$); определить «насколько шире», чем X , должно быть пространство Y , чтобы любой «идеал» (точнее, z -инвариантное подпространство) I , $I \subset Y$, содержащий функции из X ($I \cap X \neq \{0\}$), был локальным в Y . Мы следуем именно такой постановке задачи.

Теоремы единственности связаны с проблемой локализации двояко: они должны завершать описание идеалов (указывая нетривиальные нуль-множества (дивизоры) k , для которых $I_k \neq \{0\}$), но они могут быть и способом установления локальности. Второй вариант восходит к интерполяционной теореме Л. Карлесона и разработан Л. Хермандером,

Б. Тейлором и Дж. Келлегером (см. библиографию в (4)). Теоремы двух последних авторов существенно используются ниже, в п. 3.

1.2. Работа содержит точную асимптотическую теорему единственности (теорема 2) и признак локальности идеалов (теорема 3) в алгебрах $A_\varphi(D)$,

$$A_\varphi(D) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in A(D) : \log |f(\xi)| \leq C_\varphi \left(\frac{1}{1-|\xi|} \right), \xi \in D \right\},$$

снабженных естественной топологией индуктивного предела. Здесь $D = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 1\}$, φ — возрастающая положительная функция, удовлетворяющая некоторым условиям (см. 1.3). Все названные результаты вытекают из оценок теоремы (1).

1.3. Обозначения и соглашения:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \partial D = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\};$$

$$D(\xi, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathbb{C} : |w - \xi| > \rho(\xi)(1 - |\xi|)\}, \quad \xi \in D, \quad 0 < \rho(\xi) < 1;$$

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log \varphi(e^x) - \text{выпуклая } C^3 \text{ функция на полуоси } [0, +\infty);$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'(x) - \text{ее степенной порядок роста, } 0 \leq \alpha \leq +\infty;$$

дополнительные условия «правильности» функции φ : если $\alpha = 1$, то φ — выпуклая функция; если $\alpha = +\infty$, то функции $(\psi')^{-1/2}$, φ/φ' , φ'/φ'' — выпуклы в окрестности точки $+\infty$;

«идеал» — это всегда «замкнутый идеал» (в топологической алгебре).

Жесткие ограничения, налагаемые на мажоранту φ , обусловлены применением асимптотических формул С. Варшавского (см. ниже п. 2); все эти требования выполнены, однако, для всех элементарных функций φ и, более того, для всех функций из любого тела Харди (5), содержащего константы.

2. Оценки снизу и теоремы единственности

Теорема 1. Пусть

$$f \in A(D), \quad f \neq 0, \quad \log |f(\xi)| \leq \varphi \left(\frac{1}{1-|\xi|} \right)$$

вблизи окружности T .

Существует число C , $C > 0$, такое, что каждая компонента связности множества $\Omega(C, \varphi^*)$,

$$\Omega(C, \varphi^*) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \xi \in D : \log |f(\xi)| < -C\varphi^* \left(\frac{1}{1-|\xi|} \right) \right\},$$

относительно компактна в D .

Здесь $\varphi^* = \varphi$, если $1 < \alpha \leq +\infty$, и

$$\varphi^*(t) = t \left(\int_1^t \left(\frac{\varphi(x)}{x^3} \right)^{1/2} dx \right)^2, \quad t \geq 1,$$

если $\alpha \leq 1$.

Замечание 1. При $\alpha > 1$ константа C зависит лишь от α , и C — абсолютная постоянная при $\alpha = 1$,

$$\int_1^\infty \left(\frac{\varphi(x)}{x^3} \right)^{1/2} dx = +\infty.$$

Замечание 2. Если вместо функции φ^* взять любую меньшую (по порядку) функцию φ . ($\varphi_*(t) = o(\varphi^*(t))$, $t \rightarrow +\infty$), то заключение теоремы станет неверным. Нужные примеры содержатся в (6, 3) и достигаются уже на функциях f , нигде не обращающихся в нуль. С другой стороны,

У. Хеймен и Ч. Линден ⁽⁷⁾ установили, что, если вместо Φ^* взять $\Phi^* = \varphi \log \varphi$, то при $1 \leq \alpha < +\infty$ в дополнении $D \setminus \Omega(C^*, \Phi^*)$, $C^* \geq C_0$ содержится некоторая система окружностей $\{\xi: |\xi| = r_n\}$, $r_n \uparrow 1$, $n=1, 2, \dots$. Примеры показывают, что для $D \setminus \Omega(C^*, \Phi^*)$ это уже, вообще говоря, не так.

Замечание 3. Функция Φ^* введена в ⁽⁶⁾; сравнительное изучение роста Φ^* и Φ имеется в ⁽³⁾, § 1.3.

План доказательства теоремы 1. Шаг 1. Множество $\Omega(C^*, \Phi^*)$ «глубоко» содержится в $\Omega(C, \Phi^*)$ при достаточно большом отношении C^*/C ; точнее, $D(\xi, \rho) \cap \Omega(C^*, \Phi^*) = \emptyset$, если $\xi \in \partial\Omega(C, \Phi^*)$,

$$\rho(\xi) = \pi \varphi \left(\frac{1}{1-|\xi|} \right) (1-|\xi|) / \varphi' \left(\frac{1}{1-|\xi|} \right) \quad \text{при } \alpha = +\infty,$$

$$\rho(\xi) = \beta = \text{const} < 1 \quad \text{при } \alpha < +\infty.$$

Шаг 2. Мера множества

$$\{\theta: |\theta - \arg \xi| \leq \pi/4\}, \quad \xi + \rho(\xi)(1-|\xi|)e^{i\theta} \in \Omega(C, \Phi^*)$$

не может быть близка к $\pi/2$ (β достаточно велико при $\alpha < +\infty$), когда $\xi \in \partial\Omega(C, \Phi^*)$ и $|\xi| \rightarrow 1$.

Шаг 3. Из шага 2 и некоторых геометрических рассуждений выводится, что некомпактная (в D) компонента множества $\Omega(C, \Phi^*)$, содержит некоторый радиальный отрезок, оканчивающийся на окружности T , а, значит, в силу 1, и некоторый (криволинейный, вообще говоря) треугольник Δ ; выписываются уравнения его сторон.

Шаг 4. Треугольник Δ конформно отображается на полосу, используются асимптотические формулы С. Варшавского и стандартная (граничная) теорема единственности для ограниченных функций, что и приводит к противоречию (если предположить существование упомянутой в 3 компоненты).

Теорема 2. Пусть $f \in A_\varphi(D)$ и пусть Γ — непрерывная кривая, $\Gamma \subset D$,

$$\lim_{\xi \in \Gamma, |\xi| \rightarrow 1} (1-|\xi|) = 0.$$

$\xi \in \Gamma, |\xi| \rightarrow 1$

Если

$$\overline{\lim}_{\xi \in \Gamma, |\xi| \rightarrow 1} \frac{\log |f(\xi)|}{\varphi \left(\frac{1}{1-|\xi|} \right)} = -\infty, \quad (*)$$

то $f \equiv 0$.

Один частный случай этой теоремы содержится в ⁽⁸⁾, асимптотические теоремы единственности для других классов функций см. также ^(9, 10). Стоит отметить, что теорема 2, по существу, совпадает с теоремой 1 и, следовательно, замечания 2—3 можно отнести и к ней. Интересно также, что для всех φ с $\int_1^\infty (\varphi(x)/x^3)^{1/2} dx < +\infty$ условие $(*)$ сводится к

$$\overline{\lim}_{\xi \in \Gamma, |\xi| \rightarrow 1} (1-|\xi|) \log |f(\xi)| = -\infty.$$

3. Идеалы. Из теоремы 1 и результатов Келлегера и Тейлора ⁽⁴⁾ вытекают признаки локальности идеалов.

Теорема 3. Если I — замкнутый идеал в алгебре $A_\varphi(D)$ и $I \cap A_\varphi(D)^+ \neq \{0\}$, то I — локальный идеал. В частности, любой идеал в алгебре $A_\varphi(D)$ локален, если $1 < \alpha \leq +\infty$.

Второе утверждение теоремы 3 при $\alpha < +\infty$, по существу, доказано в работе ⁽¹¹⁾, хотя в явном виде там присутствует лишь случай $\varphi(t) = t^\alpha$, $1 < \alpha < +\infty$.

Теорема 3 не вносит еще полной ясности в задачу о локализации идеалов, хотя и исчерпывает много интересных случаев. Неясно, например, является ли $A_{\Phi}(D)$ «наименьшим» пространством, содержащим $A_{\Phi}(D)$, где локальны все «идеалы» (z -инвариантные подпространства), порожденные элементами из $A_{\Phi}(D)$; при $\alpha \leq 1$ неясно даже, будет ли $A_{\Phi}(D)$ «наименьшей» алгеброй с подобным свойством. Известно только, что, добиваясь локализуемости главных идеалов, это пространство $A_{\Phi}(D)$ можно существенно уменьшить ⁽³⁾.

Работа выполнена под руководством Н. К. Никольского.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
11 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. К. Никольский, Математический анализ, Итоги науки, т. 12, М., 1974, стр. 192. ² J.-P. Ferrier, Nort - Holland, Math. Stud., v. 4, Amsterdam - London, 1973, p. 93. ³ Н. К. Никольский, Тр. МИАН, т. 120, 270, (1974). ⁴ J. J. Kelleher, B. A. Taylor, J. reine u. angew. Math., v. 255, 190 (1972). ⁵ Н. Бурбаки, Функции действительного переменного, М., 1965, стр. 424. ⁶ Н. К. Никольский, ДАН, т. 205, № 3, 522 (1972). ⁷ C. N. Linden, Quart. J. Math., Ser. 2, v. 7, 196 (1956). ⁸ А. Л. Шагинян, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, т. 12, № 1, 3 (1959). ⁹ А. Л. Шагинян, ДАН, т. 129, № 2, 284 (1959). ¹⁰ В. С. Захарян, Матем сб., т. 63 (105), 3 (1964). ¹¹ В. И. Мацаев, Е. З. Мигульский, Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 56, Л., 1976, стр. 73. ¹² С. Мандельброт, Примающиеся ряда. Регуляризация последовательностей. Применения, М., 1955, стр. 267. ¹³ M. L. Cartwright, Integral Functions, London, 1956, p. 131.