

Б. И. БИРГЕР

О ТЕРМОКОНВЕКТИВНЫХ ВОЛНАХ В ВЕРХНЕЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 22 IV 1976)

Рассмотрим задачу о возникновении конвективной неустойчивости в вязкоупругом горизонтальном слое, подогреваемом снизу. Границы слоя — изотермические, и на них отсутствуют вертикальные смещения и касательные напряжения. Используется приближение Буссинеска, т. е. среда предполагается сжимаемой только термически. Реология среды описывается линейным законом упругого последования

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij}(t) + \int_{-\infty}^t K(t-t') \sigma_{ij}(t') dt' \right],$$

где e_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензора девиатора деформаций и тензора девиатора напряжений, μ — модуль сдвига, t — время, $K(t)$ — ядро релаксации. Если искать вертикальные смещения в виде

$$u_z = U_z \sin \pi z \cdot \exp(ikx + \lambda t), \quad (1)$$

где k — волновое число, характеризующее периодичность в горизонтальном направлении, то получаем характеристическое уравнение для декрементов λ ⁽¹⁾

$$\lambda^2 \frac{\tau}{\text{Pr}} + \lambda \frac{\tau}{\text{Pr}} (k^2 + \pi^2) + \frac{k^2 + \pi^2}{1 + K^*(\lambda)} - \tau \text{Ra} \frac{k^2}{k^2 + \pi^2} + \frac{(k^2 + \pi^2)^2}{\lambda [1 + K^*(\lambda)]} = 0, \quad (2)$$

где $K^*(\lambda)$ — лапласовское изображение ядра релаксации, а безразмерные параметры τ/Pr и τRa введены так

$$\frac{\tau}{\text{Pr}} = \frac{\rho \kappa^2}{\mu d^2},$$

$$\tau \text{Ra} = \frac{\rho g \alpha (T_1 - T_2) d}{\mu},$$

где ρ — плотность, κ — температуропроводность, d — толщина слоя, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент теплового расширения, T_1 , T_2 — температуры соответственно на нижней и верхней границах, причем $T_1 > T_2$. В уравнении (1) и далее все физические параметры — безразмерные. В качестве масштаба длины выбрана толщина слоя d , а масштаба времени — d^2/κ .

Положив $\lambda=0$ в уравнении (2), нетрудно убедиться, что монотонная неустойчивость может возникнуть только в такой среде, ядро релаксации которой удовлетворяет условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda [1 + K^*(\lambda)] \neq 0. \quad (3)$$

Для исследования колебательной неустойчивости положим $\lambda = i\omega$ в уравнении (2). Разделяя действительную и мнимую части, получаем после преобразований

$$\omega^2 \frac{\tau}{Pr} - \frac{\omega B}{(1+A)^2 + B^2} - (k^2 + \pi^2) \frac{1+A}{(1+A)^2 + B^2} = 0, \quad (4)$$

$$\tau Ra_{кр} = - \frac{k^2 + \pi^2}{k^2} \frac{B}{(1+A)^2 + B^2} \left[\omega + \frac{(k^2 + \pi^2)^2}{\omega} \right], \quad (5)$$

где A и B — функции ω : $A(\omega) = \text{Re } K^*(i\omega)$, $B(\omega) = \text{Im } K^*(i\omega)$. При $\lambda = i\omega$ соотношение (4) описывает возмущение, имеющее характер волны (такие волны будем называть термоконвективными). Подставляя $\omega(k)$, найденную из дисперсионного уравнения (4), в равенство (5), можно найти $\tau Ra_{кр}(k)$. Значение минимума этой функции $\tau Ra_m = \min \tau Ra_{кр}(k)$, который достигается при некотором значении $k = k_m$, определяет порог колебательной неустойчивости: при $\tau Ra < \tau Ra_m$ любая термоконвективная волна затухает.

Уравнения (4), (5) позволяют в рамках различных реологических моделей исследовать колебательную неустойчивость верхней мантии, для которой примем обычные оценки физических параметров: $\rho = 3,5$ г/см³, $g = 10^3$ см/сек², $\alpha = 4 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹, $\mu = 10^{12}$ дин/см², $\kappa = 10^{-2}$ см²/сек, $T_1 - T_2 = 10^3$ град. Из данных оценок следует, что для верхней мантии $\tau/Pr \approx 10^{-32}$, $\tau Ra \approx 10^{-2}$.

Если принять, что реология верхней мантии описывается законом Ломнитца (2) или его модификацией, предложенной Джеффрисом (3), безразмерное ядро релаксации представляется в виде

$$K(t) = qp(1+pt)^{\gamma-1}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (6)$$

где $q \approx 5 \cdot 10^{-3}$, $p = ad^2/\kappa \approx 10^{22}$ ($a \approx 10^4$ сек⁻¹ — размерная константа, введенная Джеффрисом). Положив $\gamma = 0$, что соответствует закону Ломнитца, для частот, лежащих в диапазоне $\omega \ll p$, из уравнений (4) — (6) удается найти

$$\omega = \frac{2}{\pi q} (k^2 + \pi^2), \quad (7)$$

$$\tau Ra_{кр}(k) = \left(1 + \frac{q^2 \pi^2}{4} \right) \frac{(k^2 + \pi^2)^2}{k^2}. \quad (8)$$

Из равенства (8) определяем минимальное критическое значение $\tau Ra_m = 4\pi^2$, которое достигается при $k_m = \pi$. Как следует из (7), $\omega_m = 4\pi/q$. Итак, пороговая термоконвективная волна распространяется со скоростью $(\omega_m/k_m)\kappa/d \approx 3$ см/год. Однако, поскольку для верхней мантии $\tau Ra < \tau Ra_m$, данная волна затухает.

В случае, когда γ не слишком близко к нулю или единице, из уравнений (4), (5), (6) получаем

$$\omega = (k^2 + \pi^2) \text{ctg } \gamma\pi/2, \quad (9)$$

$$\tau Ra_{кр}(k) = \frac{(\text{ctg } \gamma\pi/2)^{\gamma}}{q^{\gamma} \Gamma(\gamma) \cos \gamma\pi/2} \frac{(k^2 + \pi^2)^{2+\gamma}}{k^2}, \quad (10)$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция. Минимум правой части равенства (10) достигается при

$$k_m = \pi(1+\gamma)^{-1/2}. \quad (11)$$

Положив $\gamma = 1/3$, из (9) — (11) находим: $k_m \approx \pi$, $\omega_m \approx 30$, $\tau Ra_m \approx 10^{-3}$. В этом случае пороговая термоконвективная волна распространяется со скоростью $\approx 0,03$ см/год и не затухает ($\tau Ra > \tau Ra_m$).

Как следует из (3), (6), монотонная неустойчивость может возникнуть только при $\gamma = 1$, что соответствует реологической модели Максвелла. Джеффрис, получив этот результат несколько иным путем⁽⁴⁾, пришел к выводу, что мантия Земли конвективно устойчива, не исследовав колебательной неустойчивости своей модели. Проведенный выше анализ показывает, что при существующей неопределенности параметров (в частности реологических) верхней мантии можно построить достаточно реальную модель, для которой пороговая термоконвективная волна имеет скорость ≈ 1 см/год и не затухает. Данное утверждение допускает интересные следствия и, в частности, позволяет по-новому объяснить магнитные аномалии, наблюдаемые в океанах.

Предположим, что амплитуда термоконвективной волны в верхней мантии такова, что на глубине ≈ 2 км под океаническим дном, где расположен слой, сложенный из пород, обладающих сильной намагничиваемостью, температура в момент прохождения гребня волны превышает точку Кюри для этих пород. В рамках проведенного линейного анализа устойчивости невозможно определить амплитуду волны. Сделанное предположение о величине амплитуды означает: смещения в волне настолько велики, что к поверхности выносятся материал из достаточно глубоких слоев верхней мантии, где высока температура. После прохождения гребня волны магнитные породы, расположенные вдоль фронта волны, приобретают намагниченность, определяемую геомагнитным полем, существовавшим в момент охлаждения этих пород ниже точки Кюри. Предлагаемое объяснение магнитных аномалий является модификацией гипотезы Вайна — Мэтьюза⁽⁵⁾, которая лежит в основе концепции тектоники плит. Скорость порядка 1 см/год, определенная с помощью данных о магнитных аномалиях и хронологической шкалы инверсий геомагнитного поля, интерпретируется не как скорость движения литосферной плиты, а как скорость распространения термоконвективной волны.

Чтобы объяснить в рамках сделанных предположений симметрию магнитных аномалий относительно осей океанических хребтов, рассмотрим верхнюю мантию под одним из океанов, представив ее как горизонтальный слой, ограниченный вертикальными боковыми стенками (границами с примыкающими участками континентальной мантии). Пусть при $t < t_0$ вся верхняя мантия горизонтально однородна, и имеет место механическое равновесие. В некий момент $t = t_0$ начинается выплавление из мантии континентальной коры, что приводит к возмущениям температуры и вертикальной компоненты смещения на границах океанической мантии. Эти начальные возмущения служат источником непрерывному спектру термоконвективных волн, однако при $\tau Ra \approx \tau Ra_m$ только волны с $\omega \approx \omega_m$, $k \approx k_m$ не затухают. Итак, в океанической мантии навстречу друг другу распространяются два пакета термоконвективных волн, образуя симметричные линейные магнитные аномалии. Волновой пакет движется с групповой скоростью $d\omega/dk$. Как следует из дисперсионного соотношения (7) или (9), при $k_m = \pi$ групповая скорость равна фазовой, которая уже была оценена. Когда в некий момент $t = t_1$ волновые пакеты встречаются в середине океана, температура удваивается, что приводит к расплавлению верхней мантии и образованию срединно-океанического хребта. При $t > t_1$ встречные бегущие волны с одинаковыми параметрами начинают

накладываться друг на друга, формируя стоячую волну, которая уже не может привести к созданию новых магнитных аномалий.

Предположение о том, что в океанической мантии распространяются термоконвективные волны, амплитуда которых определяется из условий на границах с континентами, вводит физический механизм, выравнивающий средние значения тепловых потоков на материках и океанах.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. И. Бургер, Физика Земли, № 3 (1976). ² C. Lomnitz, J. Appl. Phys., v. 28, № 2 (1957). ³ H. Jeffreys, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., v. 1, № 1 (1958). ⁴ H. Jeffreys, ibid., v. 1, № 2 (1958). ⁵ Новая глобальная тектоника, М., «Мир», 1974.