

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

С. Я. ЯКУБОВ, М. К. БАЛАЕВ

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВСЕЙ ОСИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 16 II 1976)

В статье выделены классы уравнений вида

$$L(D_t)u = D_t^n u(t) + \sum_{k=1}^n A_k D_t^{n-k} u(t) = f(t), \quad t \in R, \quad (1)$$

($R = (-\infty, +\infty)$, $D_t = d/dt$) с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве E , для которых задача на всей оси корректна в пространствах типа C . Вопросы разрешимости для уравнений вида (1) исследованы в работах ⁽¹⁻⁷⁾, часть из которых вошла в монографию ⁽⁸⁾. В ⁽¹⁻³⁾ главным является оператор A_1 , в ⁽⁴⁾ — A_2 , а в ⁽⁵⁻⁷⁾ — оператор A_n . В отличие от этих работ здесь главным может быть любой оператор A_s . Отметим, что даже в случае $s=1$ и $s=n$ наши результаты являются новыми.

1. Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение первого порядка

$$D_t u(t) + A u(t) = f(t), \quad t \in R, \quad (2)$$

где A , вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E , с областью определения $\mathcal{D}(A)$.

Определим в комплексной плоскости C^1 множество

$$G_{d,\delta} = \{\lambda \in C^1: |\lambda| \geq d, |\arg \lambda - \pi/2| < \delta \text{ или } |\arg \lambda + \pi/2| < \delta\},$$

где $0 < \delta < \pi/2$, $d < \infty$.

Пусть S — подпространство банахова пространства E . Через $R_s(\lambda; -A)$ обозначим оператор со свойством

$$(-A - \lambda I) R_s(\lambda; -A) u = u \text{ при любом } u \in S.$$

Очевидно, если оператор $-A$ имеет резольвенту $R(\lambda; -A)$, то оператор $R_s(\lambda; -A)$ будет сужением оператора $R(\lambda; -A)$ на S . Поэтому $R_s(\lambda; -A)$ назовем S -резольвентой, а точку $\lambda \in C^1$ комплексной плоскости, при которой существует S -резольвента, S -регулярной точкой оператора $-A$.

Предположим, что имеет место условие:

1) Множество $G_{d,\delta}$ и прямая $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$, $\gamma \in R$, принадлежат S -резольвентному множеству оператора $-A$ и при некотором r имеет место оценка

$$\|R_s(\lambda; -A)\|_{B(S, E)} \leq c |\lambda|^r, \quad \lambda \in G_{d,\delta}.$$

Оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1} , определенный на пространстве E .

Пусть E_k , $k=0, 1, \dots, n$, — банаховы пространства, для которых имеют место непрерывные вложения $E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_0 = E$.

Обозначим через $C_{\gamma}^{n,\alpha}(R; E_n, \dots, E_0)$ пространство функций, заданных на R , с нормой

$$\|u\|_{C_{\gamma}^{n,\alpha}(R; E_n, \dots, E_0)} = \sum_{j=0}^n [\sup_t \|D_t^j(e^{-\gamma t} u(t))\|_{E_{n-j}} + \\ + \sup_{t, \tau} \|\Delta(D_t^j(e^{-\gamma t} u(t)); t, \tau)\|_{E_{n-j}} \cdot |t - \tau|^{-\alpha}],$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $\Delta(\varphi(t); t, \tau) = \varphi(t) - \varphi(\tau)$, $C_{\gamma}^{n,\alpha}(R; E, \dots, E) = C_{\gamma}^{n,\alpha}(R; E)$.

Введем ломаные $\Gamma^{\pm}(\gamma)$, состоящие из общего вертикального звена, проходящего через точку $\lambda = \gamma$, и наклонных звеньев, которые параллельны сторонам угла $|\pm \pi/2 - \arg \lambda| < \delta$, $0 < \delta < \pi/2$. При этом контур $\Gamma^{+}(\gamma)$ содержит внутри себя часть спектра оператора $-A$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$, а контур $\Gamma^{-}(\gamma)$ — часть спектра $-A$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \gamma$. Оба контура ориентированы так, что направление вертикального звена совпадает с направлением мнимой оси. Ради краткости обозначим $\Gamma^{\pm}(0) = \Gamma^{\pm}$.

Определим фундаментальное решение $V(t)$ уравнения $D_t u(t) + Au(t) = 0$ формулой

$$V(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{+}(\gamma) \cup \Gamma^{-}(\gamma)} e^{\lambda t} R_s(\lambda; -A) d\lambda \quad \text{при } t < 0 \quad (t > 0).$$

Пусть $E(A) = \{u \in \mathcal{D}(A), \|u\|_{E(A)} = \|u\| + \|Au\|\}$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1) и $\{r\} < \alpha \leq 1$.

Тогда уравнение (2) имеет единственное решение $u \in C_{\gamma}^{1,\beta}(R; E(A), E)$, где $\beta = \alpha - \{r\}$, если $\{r\} > 0$, и $\beta < \alpha$, если $\{r\} = 0$, при любой правой части $f \in C_{\gamma}^{[r]+1,\alpha}(R; S)$, определяемое при $0 \leq r < \infty$ формулой

$$u(t) = (-1)^{[r]+1} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{-[r]-1} V(t-\tau) D_{\tau}^{[r]+1} f(\tau) d\tau + \\ + \sum_{j=1}^{[r]+1} (-1)^{j+[r]+1} A^{j-[r]-2} D_{\tau}^{[r]+1-j} f(t),$$

а при $-1 \leq r < 0$ — формулой

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

причем имеет место оценка

$$\|u\|_{C_{\gamma}^{1,\beta}(R; E(A), E)} \leq c \|f\|_{C_{\gamma}^{[r]+1,\alpha}(R; S)}.$$

Доказательство этой теоремы основывается на ряде лемм, которые имеют и самостоятельный интерес. Приведем некоторые из них.

Лемма 1. Если теорема 1 верна при $\gamma = 0$, то она верна при любом вещественном γ .

Лемма 2. Пусть выполнено условие 1) и $\gamma = 0$.

Тогда при любом $u \in S$ функция $A^{-p} V(t) u$, где $p \geq [r] + 2$, имеет пределы справа и слева в нуле, причем

$$A^{-p} V(+0) u = A^{-p} u + \frac{(-1)^{p+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma^{+}(e)} \lambda^{-p} R_s(\lambda; -A) u d\lambda,$$

$$A^{-p}V(-0)u = -A^{-p}u + \frac{(-1)^{p+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma^*(\varepsilon)} \lambda^{-p} R_s(\lambda; -A) u d\lambda,$$

$$A^{-p}[V(+0) - V(-0)]u = A^{-p}u.$$

2. Определение. Дифференциально-операторное выражение $L(D_t)$ назовем эллиптическо-параболическим, если выполнены следующие условия:

- 1°) $A_1, \dots, A_n$ — замкнутые операторы в пространстве E . Оператор A_n имеет ограниченный обратный A_n^{-1} , определенный на пространстве E ;
 2°) $\mathcal{D}(A_n) \subset \mathcal{D}(A_{n-1}) \subset \dots \subset \mathcal{D}(A_1) \subset E$;
 3°) операторный пучок $L(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}A_1 + \dots + A_n$, определенный на $\mathcal{D}(A_n)$, имеет ограниченный обратный на E при всех $\lambda \in G_{d, \delta}$ и на прямой $\text{Re } \lambda = \gamma$, причем при некоторых p_k справедливы оценки

$$\|A_k L^{-1}(\lambda)\|_{B(E)} \leq c |\lambda|^{p_k}, \quad k=0, 1, \dots, n-1; A_0 = I.$$

При помощи замены $v_k(t) = D_t^{k-1}u(t)$, $k=1, \dots, n$, уравнение (1) сводим к эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$D_t v(t) + \mathfrak{A}v(t) = F(t), \quad t \in R, \quad (3)$$

где $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$, $\mathfrak{A}v(t) = (-v_2(t), \dots, -v_n(t), A_n v_1(t) + \dots + A_1 v_n(t))$, $F(t) = (0, \dots, 0, f(t))$. Областью определения оператора $\mathfrak{A}$ естественно считать множество $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \mathcal{D}(A_n) \times \mathcal{D}(A_{n-1}) \times \dots \times \mathcal{D}(A_1)$.

Обозначим через $S = \{0\} \times \dots \times \{0\} \times E$ подпространство банахова пространства $E = E(A_{n-1}) \times E(A_{n-2}) \times \dots \times E(A_1) \times E$.

Теперь покажем, что к уравнению (3) применима теорема 1 в $\tilde{E}$. С этой целью доказывается, что оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию 1°).

Л е м м а 3. Пусть выполнены условия 1°) — 3°).

Тогда S -резольвента оператора $-\mathfrak{A}$ удовлетворяет неравенству

$$\|R_S(\lambda; -\mathfrak{A})\|_{B(S, \tilde{E})} \leq c |\lambda|^m, \quad \lambda \in G_{d, \delta},$$

где $m = \max_{k=0, 1, \dots, n-1} (p_k + n - k - 1)$.

Применяя теорему 1 к уравнению (3), приходим к утверждению.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия 1°) — 3°) и $\{m\} < \alpha \leq 1$.

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $u \in C_{\gamma}^{n, \beta}(R; E_n, \dots, E_1, E)$, где $\beta = \alpha - \{m\}$, если $\{m\} > 0$ и $\beta < \alpha$, если $\{m\} = 0$, при любой правой части $f \in C_{\gamma}^{[m]+1, \alpha}(R; E)$, причем справедливо неравенство

$$\|u\|_{C_{\gamma}^{n, \beta}(R; E_n, \dots, E_1, E)} \leq c \|f\|_{C_{\gamma}^{[m]+1, \alpha}(R; E)},$$

где $m = \max_{k=0, 1, \dots, n-1} (p_k + n - k - 1)$.

В частности, при $p_k = k - n$, $k=0, 1, \dots, n$, эта теорема совпадает с теоремой Б. А. Пламеневского⁽⁶⁾ (см. также⁽⁹⁾).

Далее, действуя другой заменой, а именно $v_k(t) = A_s D_t^{k-1} u(t)$, $k=1, \dots, n-1$, $v_n(t) = D_t^{n-1} u(t)$, доказываем новую теорему корректности для задачи (1). В этом случае получается уравнение (3) с $F(t) = (0, \dots, 0, f(t))$,

$$\mathfrak{A}v(t) = (-v_2(t), \dots, -v_{n-1}(t), -A_s v_n(t), A_n A_s^{-1} v_1(t) + \dots + A_2 A_s^{-1} v_{n-1}(t) + A_1 v_n(t)).$$

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1°) при некотором s оператор A_s имеет ограниченный обратный A_s^{-1} , определенный на пространстве E ;
 2°) операторы $A_j A_s^{-1}$, $j=1, \dots, n$, ограничены;

3°) операторный пучок $L(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}A_1 + \dots + A_n$, определенный на $\mathcal{D}(A_s)$, имеет ограниченный обратный на E при всех $\lambda \in G_{d, \delta}$ и на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$, причем при некоторых q_0 и q_s справедливы оценки

$$\|L^{-1}(\lambda)\|_{B(E)} \leq c |\lambda|^{q_0}, \quad \lambda \in G_{d, \delta},$$

$$\|A_s L^{-1}(\lambda)\|_{B(E)} \leq c |\lambda|^{q_s}, \quad \lambda \in G_{d, \delta}.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $u \in C_{\gamma}^{n, \beta}(R; E(A_s), \dots, E(A_s), E)$, где $\beta = \alpha - \{l\}$, если $\{l\} > 0$, и $\beta < \alpha$, если $\{l\} = 0$, при любой правой части $f \in C_{\gamma}^{l+1, \alpha}(R; E)$, причем справедливо неравенство

$$\|u\|_{C_{\gamma}^{n, \beta}(R; E(A_s), \dots, E(A_s), E)} \leq c \|f\|_{C_{\gamma}^{l+1, \alpha}(R; E)},$$

где $l = \max(n + q_0 - 1, n + q_s - 2)$.

Азербайджанский педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
31 I 1976

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. С. Митягин, Изв. АН АзербССР, № 1 (1961).
- ² С. Я. Якубов, ДАН, т. 156, № 5 (1964).
- ³ С. Я. Якубов, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, в. 3 (1970).
- ⁴ С. Я. Якубов, ДАН, т. 196, № 3 (1971).
- ⁵ М. Г. Гасымов, ДАН, т. 200, № 1 (1971).
- ⁶ Б. А. Пламеневский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 36 (1972).
- ⁷ Ю. А. Дубинский, Матем. сб., т. 90 (132), 1 (1973).
- ⁸ С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967.
- ⁹ S. Agmon, L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., v. 16, 2 (1963).