

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

А. А. ЕВДОКИМОВ

ЦЕПНЫЕ КОДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАССТОЯНИЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 XII 1975)

Конечная последовательность $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ двоичных n -ок $\bar{a}_i = (\alpha_i, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, образует цепной код с расстоянием d , если:

1) $\rho(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}) = 1$ при $i = 0, 1, \dots, l-1$;

2) из $|i-j| \geq d$ следует $\rho(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \geq d$ для всех $0 \leq i, j \leq l$, где $\rho(\bar{a}, \bar{\beta}) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$ — расстояние Хемминга между n -ками $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, и $l \geq d$, чтобы не рассматривать вырожденные случаи. Будем такой код называть (n, d) -цепью длины l . Пусть $\mathcal{L}(n, d)$ — наибольшая длина (n, d) -цепи для заданных n и d . Задача — найти функцию $\mathcal{L}(n, d)$ и построить цепной код длины $\mathcal{L}(n, d)$ или близкой к ней — широко известна и отличается от классической задачи построения помехоустойчивых (n, d) -кодов условием 1) на кодовое множество, т. е. требованием «связности» этого множества. Цепные коды изучаются в связи с кодированием в аналого-цифровых преобразователях, в счетчиках импульсов, а случай $d=2$ интенсивно изучался в связи с оценками эффективности локальных алгоритмов минимизации булевых функций ^(1, 10, 11).

В графе единичного n -мерного куба (n, d) -цепи соответствует путь (маршрут) по ребрам этого куба, который по свойству 2) не подходит сам к себе ближе, чем на расстояние d . Для $d=1$ это путь без самопересечений и легко найти, что $\mathcal{L}(n, 1) = 2^n - 1$, построив гамильтонову цепь в n -кубе. Известно, что

$$\mathcal{L}(n, 2) = \lambda(n) \cdot 2^n, \quad (1)$$

где $1/4 < \lambda(n) < 1/2$ при $n > 3$ (более точные оценки см. ^(2, 3, 7, 8)) и нижняя оценка получена прямой конструкцией $(n, 2)$ -цепей. Для произвольного d $\mathcal{L}(n, d) \leq dA(n, d)$, где $A(n, d)$ — максимальная мощность (n, d) -кода, и известно, что при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $d = 2t+1$

$$2^n / n^{d(1+\varepsilon_n)} \geq \mathcal{L}(n, d) \geq 2^n / n^t, \quad (2)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (некоторые уточнения этих оценок см. ^(6, 8)). Конструкции (n, d) -цепей из $(n, d-1)$ -цепей для четного d , данные В. Кли ⁽⁹⁾, есть обобщение результатов для $d=2$ из ^(4, 5). Конструкцию с нижней оценкой вида (2) получил Я. М. Курляндчик ⁽⁶⁾.

Автором доказана для $d \geq 3$ оценка

$$\mathcal{L}(n, d) \geq \frac{2^n}{n^{t(1+\varepsilon_n)}}, \quad \varepsilon_n = \frac{2 \log_2 \log_2 n}{\log_2 n}, \quad (3)$$

приблизительно в n^t раз лучшая, чем (2), и найдена простая конструкция (n, d) -цепей, длина которых удовлетворяет (3).

Ниже будем следовать, как и ранее в ⁽²⁾, «алфавитной» интерпретации задачи, отождествляя (n, d) -цепь длины l со словом длины l в n -буквенном алфавите, в каждый отрезок которого длины i ($i = d, d+1, \dots, l$) не менее d букв входят нечетное число раз. Такое слово будем называть d -словом. Общая схема конструкции d -слова такова: исходим из 1-слова наибольшей длины в некотором n -буквенном алфавите и осуществляем в это 1-сло-

во «вставки» блоков-слов в некотором другом алфавите так, чтобы все «плохие» отрезки 1-слова, т. е. такие, в которые менее d букв входят нечетное число раз, получили недостающее число букв из вставок и чтобы при этом мощность алфавита вставок была по возможности меньшей. На этом пути автором ранее была получена оценка (1) в (2), где показано, что число букв алфавита «вставок» можно выбрать равным константе, не зависящей от n .

Ниже приведена конструкция для $d=3$, которая естественно обобщается, с помощью линейных кодов Боуза — Чоудхури. Пусть X — слово в алфавите $\langle x \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. $l(X)$ — длина слова X . Если $\langle x' \rangle \subset \langle x \rangle$, то $X_{\langle x' \rangle}$ — проекция слова X на алфавит $\langle x' \rangle$, т. е. $X_{\langle x' \rangle}$ получается в результате вычеркивания из X всех тех букв, которые не входят в $\langle x' \rangle$. Букву назовем существенной в X , если она входит в X нечетное число раз, и несущественной в противном случае.

$\bar{\gamma}(X) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где $\gamma_i = 1$, если x_i существенна в X , и $\gamma_i = 0$, если x_i несущественна.

$\oplus$ — операция поразрядного сложения векторов по mod 2.

$\delta(X) = \|\bar{\gamma}(X)\| = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ — число существенных букв в X .

i последовательных букв слова X образуют подслово длины i , $i=1, 2, \dots, l(X)$.

X есть d -слово, если для любого его подслова X' такого, что $l(X') \geq d$, справедливо $\delta(X') \geq d$.

Конструкция. Пусть $X = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ — некоторое 1-слово в алфавите $\langle x \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и пусть определено соответствие $x_k \rightarrow Y_k$, $k=1, \dots, n$, где Y_k — 3-слово в алфавите $\langle y \rangle = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ такие, что $\bar{\gamma}(Y_k)$ все различны для $k=1, \dots, n$. Пусть $\{Z_k\}_{k=1, \dots, n}$ — множество слов-копий для $\{Y_k\}_{k=1, \dots, n}$ в новом алфавите $\langle z \rangle = \langle z_1, \dots, z_m \rangle$, т. е. каждое Z_k получается из Y_k заменой всех букв $y_i \rightarrow z_i$, $i=1, \dots, m$. Пусть a, b, c — буквы, не вошедшие в алфавиты $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$. образуем алфавит

$$\langle w \rangle = \langle x \rangle \cup \langle y \rangle \cup \langle z \rangle \cup \langle a, b, c \rangle$$

и слово

$$W = Y_{i_1} a x_{i_1} b Z_{i_1} c \dots Y_{i_j} a x_{i_j} b Z_{i_j} c \dots Y_{i_l} a x_{i_l} b Z_{i_l} c$$

в этом алфавите. По построению

$$W_{\langle x \rangle} = X, \quad W_{\langle y \rangle} = Y_{i_1} \dots Y_{i_l}, \quad W_{\langle z \rangle} = Z_{i_1} \dots Z_{i_l}, \quad W_{\langle a, b, c \rangle} = \underbrace{abc \dots abc}_{l \text{ раз}}.$$

Если $W'_{\langle x \rangle} = x_{i_j} \dots x_{i_{j+s}}$ — некоторое подслово слова $W_{\langle x \rangle}$, и $x_{q_1}, \dots, x_{q_p}$ — буквы, существенные в $W'_{\langle x \rangle}$, то для подслова $W'_{\langle y \rangle} = Y_{i_j} \dots Y_{i_{j+s}}$ имеем $\bar{\gamma}(W'_{\langle y \rangle}) = \bar{\gamma}(Y_{q_1}) \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}(Y_{q_p})$.

Теорема 1. W есть 3-слово.

Проверим, что для любого подслова W' слова W такого, что $l(W') \geq 3$, выполнено

$$\delta(W') \geq 3. \quad (4)$$

Поскольку $\delta(W') = \delta(W'_{\langle x \rangle}) + \delta(W'_{\langle y \rangle}) + \delta(W'_{\langle z \rangle}) + \delta(W'_{\langle abc \rangle})$, то для всякого W' , для которого $\delta(W'_{\langle x \rangle}) \geq 3$, неравенство (4) справедливо. Пусть W' таково, что $\delta(W'_{\langle x \rangle}) \leq 2$.

Если $\delta(W'_{\langle x \rangle}) = 0$, то, поскольку $W_{\langle x \rangle}$ есть 1-слово, W' не содержит букв из $\langle x \rangle$ и, следовательно, W' есть подслово слова $bZ_{i_j} c Y_{i_{j+1}} a$ для некоторого j , а так как Z_{i_j} и $Y_{i_{j+1}}$ суть 3-слова, то (4) справедливо.

В случае $\delta(W'_{\langle x \rangle}) = 1$ или $\delta(W'_{\langle x \rangle}) = 2$ пусть $W'_{\langle x \rangle} = x_{i_j} \dots x_{i_{j+s}}$ и тогда все возможные расположения подслова W' в слове W изобразим схематически

$$\dots x_{i_{j-1}} \underset{1}{[} bZ_{i_{j-1}} cY_{i_j} a \underset{2}{[} x_{i_j} \dots x_{i_{j+s}} \underset{3}{]} bZ_{i_{j+s}} cY_{i_{j+s+1}} a \underset{4}{]} x_{i_{j+s+1}} \dots,$$

где сечение, определяющее левый конец W' , есть одно из сечений между $\underset{1}{[}$ и $\underset{2}{[}$, а правый — между $\underset{3}{]}$ и $\underset{4}{]}$. Проверим, что при любом выборе концов для W' справедливо неравенство (4).

Случай $\delta(W'_{\langle x \rangle}) = 1$. $l(W'_{\langle x \rangle}) = s + 1$ нечетно. Пусть x_p — существенная буква в $W'_{\langle x \rangle}$. Если ни один из концов W' не совпадает с сечениями 1, 2, 3, 4, то $W'_{\langle ab \rangle} = \underbrace{ab \dots ab}_{s+1 \text{ раз}}$, $\delta(W'_{\langle ab \rangle}) = 2$, и (4) справедливо.

Пусть левый конец W' есть сечение 1, а правый изменяется от 3 к 4. Тогда для $\underset{1}{[} \dots \underset{3}{]}$ имеем $\delta(W'_{\langle abc \rangle}) = 3$, и (4) остается справедливым для всех W' , пока $\delta(W'_{\langle c \rangle}) = 1$. Как только $\delta(W'_{\langle c \rangle}) = 0$, то

$$\delta(W'_{\langle z \rangle}) = \|\bar{\gamma}(Z_{i_{j-1}}) \oplus \bar{\gamma}(Z_p)\| \geq 1 \quad (5)$$

и (4) справедливо. Наконец, при $\delta(W'_{\langle a \rangle}) = 0$ (т. е. правый конец есть сечение 4) имеем

$$\delta(W'_{\langle y \rangle}) = \|\bar{\gamma}(Y_p) \oplus \bar{\gamma}(Y_{i_{j+s+1}})\| \geq 1,$$

что вместе с (5) дает неравенство (4). Пусть левый конец есть сечение 2, а правый меняется от 4 к 3. Тогда для $\underset{2}{[} \dots \underset{4}{]}$ имеем $\delta(W'_{\langle abc \rangle}) = 3$ и (4) остается справедливым для всех W' пока $\delta(W'_{\langle c \rangle}) = 1$. Как только $\delta(W'_{\langle c \rangle}) = 0$, то

$$\delta(W'_{\langle y \rangle}) = \|\bar{\gamma}(Y_{i_j}) \oplus \bar{\gamma}(Y_p)\| \geq 1, \quad (6)$$

и (4) справедливо. Наконец, при $\delta(W'_{\langle b \rangle}) = 0$ (т. е. правый конец есть сечение 3) имеем

$$\delta(W'_{\langle z \rangle}) = \|\bar{\gamma}(Z_p) \oplus \bar{\gamma}(Z_{i_{j+s}})\| \geq 1,$$

что вместе с (6) дает неравенство (4). Случаи, когда правый конец W' есть сечение 3 или 4, а левый изменяется от 1 до 2, симметричны рассмотренным выше, и для их доказательства достаточно в предыдущем рассуждении произвести замены

$$a \leftrightarrow b, \quad Y_{i_j} \leftrightarrow Z_{i_{j+s}}, \quad Y_{i_{j+s+1}} \leftrightarrow Z_{i_{j-1}}.$$

Случай $\delta(W'_{\langle x \rangle}) = 2$. $l(W'_{\langle x \rangle}) = s + 1$ чётно. Пусть x_p и x_q — существенные буквы в $W'_{\langle x \rangle}$. Если W' таково, что $\delta(W'_{\langle abc \rangle}) \neq 0$, то неравенство (4), очевидно, справедливо. Если $\delta(W'_{\langle a c \rangle}) = 0$, то легко проверить, что W' имеет один из следующих видов:

$$1) \underset{1}{[} \dots \underset{3}{]};$$

$$2) Z'_{i_{j-1}} cY_{i_j} a x_{i_j} \dots x_{i_{j+s}} bZ'_{i_{j+s}};$$

$$3) Y'_{i_j} a x_{i_j} \dots x_{i_{j+s}} bZ_{i_{j+s}} cY_{i_{j+s+1}};$$

$$4) \underset{2}{[} \dots \underset{4}{]}.$$

где Z_k' и Y_k' — подслова слов Z_k и Y_k , быть может, пустые или совпадающие с самими словами. Но в случаях 1) и 2)

$$\delta(W_{\langle v \rangle}) = \|\bar{v}(Y_p) \oplus \bar{v}(Y_q)\| \geq 1,$$

а в случаях 3) и 4)

$$\delta(W'_{\langle z \rangle}) = \|\bar{v}(Z_p) \oplus \bar{v}(Z_q)\| \geq 1,$$

что всякий раз влечет справедливость неравенства (4). Теорема доказана.

Оценку вида (3) для $\mathcal{L}(n, 3)$ получаем из конструкции, учитывая ограничение

$$2^m - 1 - m - c_m^2 \geq n \quad (7)$$

на мощности алфавитов $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle z \rangle$, возникающее из условия, что $\bar{v}(Y_i)$ все различны для $i=1, \dots, n$ и $\|\bar{v}(Y_i)\| \geq 3$. Если в 1-слово X буква x_i входит r_i раз, то по построению слова W

$$l(W) = \sum_{i=1}^n r_i [2l(Y_i) + 4]. \quad (8)$$

Пусть в качестве X взято 1-слово наибольшей длины, определенное, например, как в (2). Тогда $r_i = 2^{n-i}$ и из (8) для длины $\mathcal{L}'(k, 3)$ 3-слова, определяемого конструкцией, будем иметь

$$\mathcal{L}'(n+2m+3, 3) \geq 2^n \mathcal{L}'(m, 3), \quad (9)$$

если в качестве Y_1 взять 3-слово длины $\mathcal{L}'(m, 3)$ и для произвольного $\bar{v} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ такого, что $\|\bar{v}\| \geq 3$ и $\bar{v} \neq \bar{v}(Y_1)$, определить $Y_i = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_j}$, где $i_1, i_2, \dots, i_j$ — номера единичных разрядов вектора $\bar{v}$. Положив в соответствии с (7) $m = [\log_2 n + 2] \geq 5$, из (9) получим следующее утверждение

Теорема 2. $\mathcal{L}(n, 3) \geq 2^n / (n \log_2^2 n)$.

Автор выражает благодарность В. В. Глаголеву за обсуждение работы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
10 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов и др., Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, 1974. ² А. А. Евдокимов, Матем. заметки, т. 6, в. 3 (1969). ³ В. В. Глаголев, Дискретный анализ, в. 6 (1966). ⁴ Ю. Л. Васильев, ДАН, т. 148, № 4 (1963). ⁵ L. Danzer, V. Klee, J. Comb. Theory, v. 2, № 3 (1967). ⁶ Я. М. Кур-ляндчик, Дискретный анализ, в. 19 (1971). ⁷ В. В. Глаголев, А. А. Евдокимов, Дискретный анализ, в. 17 (1970). ⁸ R. J. Douglas, J. Comb. Theory, v. 7 (1967). ⁹ V. Klee, J. Assoc. Comp. Mach., v. 14, № 3 (1967). ¹⁰ V. Klee, Am. Math. Monthly, v. 77, № 1 (1970). ¹¹ V. Klee, Graph. Theory and Appl., № 4 (1970).