

УДК 517.934

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Е. ЗАХАРОВ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 12 III 1976)

1. Параметрическое (распадное) взаимодействие трех волновых пакетов — накачки u_0 и вторичных волн u_1 , u_2 — описывается в среде без диссипации уравнениями ⁽¹⁾

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = i u_1 u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + (v_1, \nabla u_1) = i u_0 u_2^*, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + (v_2, \nabla u_1) = i u_0 u_1^*; \quad (1)$$

здесь v_1 , v_2 — групповые скорости, $v_0 = 0$. Выбирая координаты x , y в плоскости v_1 , v_2 так, что v_1 расположена в первом квадранте, v_2 — третьем, а координату z в перпендикулярном направлении, приводим систему к эффективно двумерной (эффективно одномерный случай коллинеарных векторов v_1 , v_2 разобран в ^(2, 3)).

Определим числа $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, $b > 0$:

$$v_{1x} = \frac{a_1 b}{a_1 - a_2}, \quad v_{1y} = \frac{b}{a_1 - a_2}, \quad v_{2x} = -\frac{a_3 b}{a_2 - a_3}, \quad v_{2y} = -\frac{b}{a_2 - a_3}.$$

Рассмотрим два линейных оператора L и M :

$$L = iA \frac{\partial}{\partial x} + [A, Q], \quad M = iB \frac{\partial}{\partial x} + [B, Q], \quad (2)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & q_0 \\ -q_1^* & 0 & q_2 \\ -q_0^* & -q_2^* & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$q_0 = \frac{(a_1 - a_2)^{1/2} (a_2 - a_3)^{1/2}}{b (a_1 - a_3)} u_0, \quad q_1 = \frac{(a_2 - a_3)^{1/2}}{b (a_1 - a_3)^{1/2}} u_1, \\ q_2 = \frac{(a_1 - a_2)^{1/2}}{b (a_1 - a_3)^{1/2}} u_2, \quad (2a)$$

и убедимся, что система (1) тождественна операторному уравнению

$$L + i[L, M] = 0,$$

т. е. к ней применим метод обратной задачи рассеяния (впервые в ⁽⁴⁾).

Развивая метод, предложенный в ⁽⁴⁾, опишем процедуру получения общего решения системы (1). Будем считать, что одна из вторичных волн u_2 выделена в том смысле, что $u_2(r, t)$ при $|r| \rightarrow \infty$ ($r = (x, y, z)$) переходит в произвольную заданную $u(r - v_2 t)$, тогда как $u_{0,1} \rightarrow 0$ при $|r| \rightarrow \infty$. Это означает, что параметрическое взаимодействие происходит на заданном «фоне» волны u_2 . Физически такая постановка оправдана, если, например, частота ω_2 волны u_2 много меньше частот $\omega_{0,1} \sim \omega$ волн u_1 и u_2 . Тогда в термодинамическом равновесии

$$u_1^2 \sim u_0^2 \sim \frac{\omega_2}{\omega} u_2^2 \ll u_2^2.$$

Рассмотрим матрицы $P(x, y, z, t)$ и $F(x, \xi, y, z, t) = F(\xi, x, y, z, t)$ вида

$$P = \frac{(a_1 - a_2)^{1/2}}{b(a_1 - a_3)^{1/3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & -u^* & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & 0 & 0 \\ F_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и матрицу $K(x, \xi, y, z, t) = K^+(\xi, x, y, z, t)$, удовлетворяющую при всех x, y, t, z интегральному уравнению

$$K(x, \xi, y, z, t) + F(x, \xi, y, z, t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi', y, z, t) \times \\ \times F(\xi', \xi, y, z, t) d\xi' - \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi', y, z, t) (1 - C) F(\xi', \xi, y, z, t) d\xi = 0, \quad (3)$$

где C — произвольная постоянная диагональная матрица.

Утверждается, что если матрица F удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial y} + A \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \xi} A + [A, P(x, y, z, t)] F - F [A, P(\xi, y, z, t)] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + B \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \xi} B + [B, P(x, y, z, t)] F - F [B, P(\xi, y, z, t)] = 0, \quad (4)$$

то величины

$$q_0 = ik_{13}(x, x, y, z, t), \quad q_1 = ik_{12}(x, x, y, z, t), \quad q_2 = ik_{23}(x, x, y, z, t) \quad (5)$$

дают по формулам (2а) точные решения системы (1). Перебирая все $u(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ и все решения системы (4), найдем общее решение системы (1).

2. Указанная схема позволяет строить широкие классы точных решений системы (1). Опишем простейшее из них. Положим

$$u \equiv 0, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_{12} = F(x - a_1 y, z) \Phi(\xi - a_2 y - bt, z),$$

$$F_{13} = F(x - a_1 y, z) \Psi(\xi - a_3 y, z),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s, z)|^2 ds = J_1(z), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(s, z)|^2 ds = J_2(z),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(s, z)|^2 ds = J_3(z),$$

F, Φ, Ψ — произвольные комплексные функции.

Решая уравнение (3), найдем по формулам (5)

$$q_0(x, y, z, t) = -\frac{i}{\Delta} F(x - a_1 y, z) \Psi(x - a_3 y, z), \\ q_1(x, y, z, t) = -\frac{i}{\Delta} F(x - a_1 y, z) \Phi(x - a_2 y - bt, z), \\ q_2(x, y, z, t) = \frac{i}{\Delta} \Phi^*(x - a_2 y - bt, z) \Psi(a - a_3 y, z) \int_{-\infty}^{x - a_1 y} |F(s, z)|^2 ds, \quad (6)$$

$$\Delta = 1 + \int_{-\infty}^{x-a_1y} |F(s, z)|^2 ds \left[\int_{x-a_2y-bt}^{\infty} |\Phi(s, z)|^2 ds + \int_{x-a_3y}^{\infty} |\Psi(s, z)|^2 ds \right].$$

Асимптотически при $t \rightarrow -\infty$ решение (6) распадается на волновой пакет накачки u_0^- и волновой пакет u_1^- с интегральными интенсивностями

$$\begin{aligned} I_0^- &= \int |u_0^-(r)|^2 dr = q \int \ln(1 + J_1 J_3) dz, \\ I_1^- &= \int |u_1^-(r)|^2 dr = q \int \ln \left(1 + \frac{J_1 J_2}{1 + J_1 J_3} \right) dz, \\ q &= \frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}{b^2(a_1 - a_3)}. \end{aligned} \quad (7)$$

При $t \rightarrow +\infty$ присутствуют все три пакета с интенсивностями

$$\begin{aligned} I_0^+ &= q \int \ln \left(1 + \frac{J_1 J_3}{1 + J_1 J_2} \right) dz, \\ I_1^+ &= q \int \ln(1 + J_1 J_2) dz, \\ I_2^+ &= I_1^+ - I_1^-. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $J_1, J_3 \gg 1, J_1 \gg J_2, J_3$ мы имеем задачу о взаимодействии интенсивного пакета накачки с малым пакетом волны u_1 . Как видно из формул (7), (8), при этом происходит почти полный распад накачки. Асимптотическая форма пакетов u_1^+, u_2^+ зависит от функции Φ , не входящей в асимптотическую форму накачки u_0^- ; этот факт отражает распадную неустойчивость накачки.

3. Вся изложенная выше техника может быть применена и к задаче о взрывной неустойчивости

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = i u_1^* u_2^*, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + (v_1, \nabla u_1) = i u_0^* u_2^*, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + (v_2, \nabla u_2) = i u_0^* u_1^*.$$

Аналог точного решения (6) имеет вид

$$q_0 = -\frac{i}{\Delta} F \Psi, \quad q_1 = -\frac{i}{\Delta} F^* \Phi, \quad q_2 = \frac{i \Phi^* \Psi}{\Delta} \int_{-\infty}^{x-a_1y} |F(s, z)|^2 ds, \quad (9)$$

$$\Delta = 1 - \int_{-\infty}^{x-a_1y} |F(s, z)|^2 ds \left[\int_{x-a_2y-bt}^{\infty} |\Phi(s, z)|^2 ds + \int_{x-a_3y}^{\infty} |\Psi(s, z)|^2 ds \right].$$

При эволюции решения (9) возможно обращение знаменателя в нуль в некоторой точке в конечный момент времени. Этим доказано, что развитие взрывной неустойчивости для трехмерных волновых пакетов может привести к точечному «коллапсу».

В заключение автор благодарит С. В. Манакова за полезные замечания.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
12 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Нелинейная оптика, Итоги науки, М., 1964.
² В. Е. Захаров, С. В. Манаков, Письма ЖЭТФ, т. 18, 243 (1973). ³ В. Е. Захаров, С. В. Манаков, Препринт ИЯФ СО АН СССР 74-74, Новосибирск, 1974; ЖЭТФ, т. 69, 1654 (1975). ⁴ В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Функц. анализ и его прилож., т. 8, в. 3, 43 (1974).