

А. К. КЕРИМОВ

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 11 II 1976)

Одной из основных проблем теории дифференциальных игр (см. ⁽¹⁻⁷⁾ и др.) является задача о выделении тех начальных позиций, из которых преследование заканчивается за конечное время. В этом направлении ряд существенных результатов получен в ⁽¹⁻⁷⁾ и других работах. Тем не менее решение этой задачи в случае нелинейных дифференциальных игр сопряжено с большими вычислительными трудностями. В настоящей работе приведены эффективные достаточные условия, гарантирующие возможность окончания преследования из заданной начальной позиции для одного класса нелинейных дифференциальных игр; при этом задача преследования рассматривается в формализации Л. С. Понтрягина ^(2, 3). Полученный результат можно рассматривать как развитие методики Л. С. Понтрягина на нелинейные дифференциальные игры.

1. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением

$$\dot{z} = C(t, z)z + h(t, u, v), \quad (1)$$

где z — вектор-столбец n -мерного евклидова пространства R^n , $C(t, z)$ — матрица порядка $n \times n$, определенная и непрерывная на прямом произведении $[\tau_0, +\infty) \times R^n$; $h(t, u, v)$ — вектор-функция, непрерывная на $[\tau_0, +\infty) \times P \times Q$; P, Q — компактные подмножества пространств R^p, R^q соответственно.

Управления $u = U(t)$, $v = V(t)$ преследователя и убегающего соответственно выбираются в классе измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям $U(t) \in P, V(t) \in Q$.

Далее, потребуем, чтобы каждая задача Коши вида

$$\dot{z} = C(t, z)z + h(t, U(t), V(t)), \quad z(\tau_1) = z_1$$

обладала свойством единственности. Терминальное множество M предполагается выпуклым и замкнутым подмножеством пространства R^n . Кроме того в дальнейшем всегда предполагается, что для произвольной точки $(t, v) \in [\tau_0, +\infty) \times Q$ множество $h(t, P, v)$ выпукло.

Игра начинается из начальной позиции (τ_0, z_0) , $z_0 \notin M$; если в момент времени $t \geq \tau_0$ позиция игры характеризовалась вектором $z = \varphi(t)$, то преследователь формирует свое управление $U(s)$ на отрезке $[t, t+\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$ произвольно) по следующей информации: $z = \varphi(t)$ и управлению убегающего $V(s)$ на $[t, t+\varepsilon]$. Интегрируя уравнение (1) на $[t, t+\varepsilon]$ с начальным условием $z = \varphi(t)$ и $u = U(s), v = V(s)$, получим новую позицию $(t+\varepsilon, \varphi(t+\varepsilon))$. Далее весь процесс повторяется. Игра заканчивается, как только вектор $z = \varphi(t)$ попадет на множество M .

Говорят, что игра (1) заканчивается из начальной позиции (τ_0, z_0) , $z_0 \notin M$, в момент времени τ , если для любого управления $V: [\tau_0, \tau] \rightarrow Q$ убегающего преследователь, используя в каждый данный момент времени t доступную ему информацию, может построить свое управление $U: [\tau_0, \tau] \rightarrow P$ так, что соответствующее решение $z = \varphi(t)$ уравнения (1) было бы определено на всем $[\tau_0, \tau]$ и $\varphi(\tau) \in M$.

Пусть D — многозначное отображение, сопоставляющее каждой точке $t \geq \tau_0$ непустое подмножество $D(t) \subset R^n$. Всякую функцию $f: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow R^n$, $\tau_1 \geq \tau_0$, такую, что $f(t) \in D(t)$ для всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$, будем называть сечением отображения D . Рассмотрим теперь многозначное отображение $t \rightarrow D(t)$, $t \geq \tau_0$, такое, что: для любого $\tau \geq \tau_0$ множество $D(t) \subset R^n$ выпукло и компактно, а множество $\bigcup_{\tau_0 \leq t \leq \tau} D(t)$ ограничено в R^n . Для каждого тако-

го отображения D строятся операторы, аналогичные операторам, введенным в (').

Определение 1. Оператор $T[\tau_1, \tau_2] = T[\tau_1, \tau_2, D]$, $\tau_1 \geq \tau_0$, сопоставляет каждому подмножеству $X \subset R^n$ подмножество $T[\tau_1, \tau_2](X)$ (быть может, пустое). По определению точка $z \in T[\tau_1, \tau_2](X)$ тогда и только тогда, если для любого непрерывного сечения f отображения D на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ и любого управления $V: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow Q$ существует абсолютно непрерывное сечение $\varphi: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow R^n$ отображения D такое, что

$$\dot{\varphi}(t) \in C(t, f(t))\varphi(t) + h(t, P, V(t))$$

почти всюду на $[\tau_1, \tau_2]$,

$$\varphi(\tau_1) = z, \quad \varphi(\tau_2) \in X.$$

Далее, по определению положим, что $T[\tau, \tau](X) = X$ и $T[\tau_1, \tau_2](\emptyset) = \emptyset$, где $\emptyset$ — пустое множество.

Пусть $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$, тогда естественным образом определяется композиция операторов $T[\tau_1, \tau_2] \circ T[\tau_2, \tau_3]$, а именно

$$T[\tau_1, \tau_2] \circ T[\tau_2, \tau_3](X) = T[\tau_1, \tau_2](T[\tau_2, \tau_3](X)),$$

где $X \subset R^n$ — произвольно.

Отметим следующие свойства оператора $T[\tau_1, \tau_2]$.

Свойство 1. Если $X \subset X'$, то $T[\tau_1, \tau_2](X) \subset T[\tau_1, \tau_2](X')$.

Свойство 2. $T[\tau_1, \tau_2] \circ T[\tau_2, \tau_3](X) \subset T[\tau_1, \tau_3](X)$.

Свойство 3. Если $X \subset R^n$ выпукло и замкнуто, то множество $T[\tau_1, \tau_2](X)$ выпукло и замкнуто.

Разбиение $\omega = \{\tau_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \tau_2\}$ отрезка $[\tau_1, \tau_2]$, у которого точки t_i , $0 < i < m$, являются рациональными числами, будем называть рациональным разбиением.

Определение 2. Пусть ω — рациональное разбиение отрезка $[\tau_1, \tau_2]$, $X \subset R^n$ произвольно, положим

$$T_\omega[\tau_1, \tau_2](X) = T[t_0, t_1] \circ T[t_1, t_2] \circ \dots \circ T[t_{m-1}, t_m](X).$$

Определение 3. Множество $\tilde{T}[\tau_1, \tau_2](X)$, где $X \subset R^n$, определяется как пересечение множеств $T_\omega[\tau_1, \tau_2](X)$ по всевозможным рациональным разбиениям ω отрезка $[\tau_1, \tau_2]$, т. е.

$$\tilde{T}[\tau_1, \tau_2](X) = \bigcap_{\omega} T_\omega[\tau_1, \tau_2](X).$$

Лемма 1. Пусть $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$; тогда для любого выпуклого и замкнутого множества $X \subset R^n$

$$\tilde{T}[\tau_1, \tau_2](X) \subset T[\tau_1, t] \circ \tilde{T}[t, \tau_2](X).$$

Теорема 1. Пусть $z_0 \in D(\tau_0)$. Если существует момент времени $\tau = \tau(z_0)$ такой, что $z_0 \in \tilde{T}[\tau_0, \tau](M)$, то из точки (z_0, τ_0) преследование заканчивается в момент времени τ .

Приведем идею доказательства. Пусть убегающий выбрал на отрезке $[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ произвольное управление V . Каждому непрерывному сечению f многозначного отображения D на $[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ сопоставим в соответствии множество $E(f, V)$, определяемое как совокупность всех абсолютно непрерывных сечений $\varphi: [\tau_0, \tau_0 + \varepsilon] \rightarrow R^n$ отображения D , удовлетворяющих условиям

$$\dot{\varphi}(t) \in C(t, f(t))\varphi(t) + h(t, P, v(t))$$

почти всюду на $[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$,

$$\varphi(\tau_0) = z_0, \quad \varphi(\tau_0 + \varepsilon) \in T[\tau_0, +\varepsilon, \tau](M).$$

В силу условия $z_0 \in T[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon] \circ T[\tau_0 + \varepsilon, \tau](M)$ (см. лемму 1) и определения оператора $T[\tau_0, \tau_0 + \varepsilon]$ множество $E(f, V)$ непусто для любого непрерывного сечения f отображения D . Можно доказать, что введенное таким образом многозначное отображение $f \rightarrow E(f, V)$ имеет неподвижную точку (см. ⁽⁸⁾), т. е. существует сечение $f_0 \in E(f_0, V)$. Последнее, в силу определения множества $E(f_0, V)$, означает, что $z = f_0(t)$ есть решение включения $\dot{z} \in C(t, z)z + h(t, P, V(t))$, удовлетворяющее условиям $f_0(\tau_0) = z_0$ и $f_0(\tau_0 + \varepsilon) \in T[\tau_0 + \varepsilon, \tau](M)$.

Остается заметить, что $\tilde{T}[\tau, \tau](M) = M$.

Содержательный смысл теоремы 1 заключается в том, что нелинейная дифференциальная игра заменяется игрой, уравнение движения которой линейно по z . В этой новой игре вектор z , от которого зависит матрица $C(t, z)$, уже считается параметром управления, а сама эта игра рассматривается в области $grD = \{(t, z) : z \in D(t), t \geq \tau_0\}$.

2. Эффективность применения теоремы 1 к конкретным дифференциальным играм в значительной степени зависит от удачного выбора многозначного отображения $t \rightarrow D(t)$, по которому строятся операторы $T[\tau_1, \tau_2]$ и $\tilde{T}[\tau_1, \tau_2]$. Отметим также, что можно указать условия, при выполнении которых

$$\tilde{T}[\tau_0, \tau](M) = T[\tau_0, \tau](M).$$

Последнее равенство позволяет рассмотреть ряд нелинейных дифференциальных игр преследования и, в частности, нелинейный вариант контрольного примера ⁽¹⁾. Следующий ниже пример носит иллюстративный характер.

Пример. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением

$$\dot{z} = \lambda(z)z + \rho u - \sigma v; \quad (2)$$

здесь $z, u, v \in R^n$; σ, ρ — положительные числа; управляющие параметры u, v удовлетворяют ограничениям $\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1$; скалярная функция $\lambda(z)$ непрерывно дифференцируема на множестве $S(r) = \{z \in R^n : \|z\| \leq r\}$. Терминальное множество M состоит из нулевой точки пространства, т. е. $M = \{0\}$. Предположим, что $\lambda(z) \leq 0$ для любого $z \in S(r)$ и $\rho > \sigma$. Тогда нетрудно показать, что множество $\tilde{T}[0, \tau](M)$, где оператор $\tilde{T}[0, \tau]$ определяется по многозначному отображению $t \rightarrow D(t) = S(r)$, содержит в себе все точки $z \in S(r)$ такие, что $\|z\| \leq (\rho - \sigma)\tau$. Из этой оценки множества $\tilde{T}[0, \tau](M)$ следует, что в рассматриваемом случае преследование заканчивается из любой начальной точки $z_0 \in S(r)$ за время $\tau(z_0) = \|z_0\|/(\rho - \sigma)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, УМН, т. 21, в. 4 (130), 219 (1966). ² Л. С. Понтрягин, ДАН, т. 174, № 6, 1278 (1967). ³ Л. С. Понтрягин, ДАН, т. 175, № 4, 764 (1967). ⁴ Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, М., 1968. ⁵ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры, М., 1974. ⁶ Б. Н. Пшеничный, ДАН, т. 184, № 2, 285 (1969). ⁷ Б. Н. Пшеничный, М. И. Сагайдак, Кибернетика, № 2 (1970). ⁸ Н. Боенбласт, С. Карлин, Сб.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, стр. 495.