

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

О БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 17 III 1976)

Пусть $L_2(0, +\infty)$ — гильбертово пространство комплекснозначных функций со скалярным произведением $(x, y) = \int_0^\infty x(t) \cdot \bar{y}(t) dt$. Пусть, далее, λ_k — не обязательно различные комплексные числа такие, что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, а s_k — кратность появления λ_k на «отрезке» $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$. Положим $h_k(t) = t^{s_k-1} e^{-\lambda_k t}$, $k=1, 2, \dots$. В постоянной работе находятся критерии того, что система $\{h_k\}$, а также «близкие» к ней системы составляют безусловный базис в замыкании своих линейных оболочек.

Согласно работе ⁽¹⁾, система ненулевых элементов $\{v_k\}$ гильбертова пространства H является безусловным базисом в замыкании $(v_k; H)$ своей линейной оболочки тогда и только тогда, когда

$$\{ \{ (v, v_k) \}_{k=1}^\infty : v \in H \} = l_2^{v_k}, \quad (1)$$

$$l_2^{v_k} = \left\{ d = \{d_k\} : \sum_{k=1}^\infty |d_k|^2 \cdot \|v_k\|^{-2} < \infty \right\}.$$

Для последовательности h_k $\|h_k\|^2 = (2s_k-2)!(2\operatorname{Re} \lambda_k)^{1-2s_k}$, $(v, h_k) = \int_0^\infty v(t) \cdot t^{s_k-1} e^{-\bar{\lambda}_k t} dt$. По теореме Винера — Пэли ⁽²⁾ класс функций, представимых в виде интеграла $\int_0^\infty v(t) \cdot e^{-zt} dt$, в котором $v(t) \in L_2(0, +\infty)$ и $\operatorname{Re} z > 0$, совпадает с классом H^2 в (правой) полуплоскости (определение этого класса см. ⁽²⁾, стр. 173). Отсюда находим, что система $\{h_k\}$ составляет безусловный базис в $(h_k, L_2(0, +\infty)) = E$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \left\{ \Phi^{(s_k-1)}(\bar{\lambda}_k) \frac{(2\operatorname{Re} \lambda_k)^{s_k-1/2}}{(2s_k-2)!^{1/2}} \right\}_{k=1}^\infty : \Phi \in H^2 \right\} = l_2. \quad (2)$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $\sup_k s_k = p < \infty$. Используя соот-

ветствие $g(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, переводящее каждую функцию f из класса H^2 в функцию g из класса H_2 в круге и являющееся изоморфизмом H^2 на H_2 (см. ⁽²⁾, стр. 187), а также теорему 5 работы ⁽³⁾, после некоторых рассуждений получаем, что справедлива

Теорема 1. Для того чтобы система $\{h_k\}$ была безусловным базисом в E , необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_k \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^\infty \left| \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j + \bar{\lambda}_k} \right| \right\} > 0. \quad (3)$$

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность всех попарно различных чисел из $\{\lambda_n\}$. Тогда условие (3) равносильно следующему:

$$\inf_k \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^\infty \left| \frac{z_j - z_k}{z_j + \bar{z}_k} \right| \right\} > 0. \quad (4)$$

Теорема 1 в частном случае $s_k=1$, $k=1, 2, \dots$, получена ранее другим способом в работе ⁽⁴⁾.

Согласно теореме Лорча—Гельфанда ⁽⁵⁾ последовательность $\{h_k\}$ является базисом Рисса в E в том и только том случае, если она почти нормирована и является безусловным базисом в E , т. е., если выполнено условие (3) и условие:

$$0 < \inf \operatorname{Re} \lambda_n \leq \sup \operatorname{Re} \lambda_n < \infty. \quad (5)$$

В работе ⁽⁶⁾ показано, что из условия (5) и условия (4) следует

$$\inf_{n \neq k} |z_n - z_k| > 0. \quad (6)$$

С другой стороны, там же доказано, что из (6) и (5) следует (4). Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы система $\{h_k\}$ являлась базисом Рисса в E , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (5) и (6).

Заметим, что из условия (4) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} < \infty. \quad (7)$$

Последнее условие, как известно (см., например, ⁽⁷⁾), необходимо и достаточно для неполноты $\{h_k\}$ в $L_2(0, +\infty)$. В работе ⁽⁷⁾ при условии (7) построена биортогональная к $\{h_k\}$ система (в $L_2(0, +\infty)$). Поэтому, если выполнено условие (3), то коэффициенты базисных разложений по системе $\{h_k\}$ любой функции f из E вычисляются эффективно.

Можно указать простые достаточные условия того, чтобы имело место неравенство (3). Последовательность положительных чисел $\{b_k\}$ называют лакунарной, если $b_{k+1}/b_k \geq h > 1$, $k=1, 2, \dots$

Лемма 1. Если $\{|z_k|\}_{k=1}^{\infty}$ — лакунарная последовательность, то условие (3) выполняется.

Доказательство следует из оценок

$$\begin{aligned} \prod_{h=1}^{n-1} \left| \frac{z_n - z_h}{z_n + \bar{z}_h} \right| &\geq \prod_{h=1}^{n-1} \frac{|z_n| - |z_h|}{|z_n| + |z_h|} \geq \prod_{m=1}^{n-1} \frac{(1 - 1/h^m)}{(1 + 1/h^m)} \geq \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - 1/h^m}{1 + 1/h^m} \right) = \alpha > 0, \\ \prod_{h=n+1}^{\infty} \left| \frac{z_n - z_h}{z_n + \bar{z}_h} \right| &\geq \prod_{h=n+1}^{\infty} \frac{1 - |z_n/z_h|}{1 + |z_n/z_h|} \geq \alpha > 0. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 и леммы 1 получается

Теорема 3. Если $\{|z_k|\}$ — лакунарная последовательность, то $\{h_k\}$ — безусловный базис в E , а $\{(\operatorname{Re} \lambda_k)^{s_k - 1/2} h_k\}$ — базис Рисса в E .

Последовательность $\lambda_n = a + i n \sigma$, где $a, \sigma > 0$, удовлетворяет, очевидно, условию (3), хотя $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{n+1}/\lambda_n| = 1$. Таким образом, лакуярность последовательности $\{|\lambda_n|\}$ не является необходимой для базисности $\{x_k\}$. Случай вещественных λ_k в этом отношении — примечательное исключение.

Лемма 2. Если числа z_k положительны и упорядочены по возрастанию и если выполнено условие (4), то последовательность $\{\lambda_k\}$ лакуярна.

Доказательство. Имеем $\forall n \geq 1$

$$\prod_{h \neq n} \left| \frac{z_n - z_h}{z_n + \bar{z}_h} \right| = \prod_{h=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2z_h}{z_n + z_h} \right) \cdot \prod_{h=n+1}^{\infty} \left(\frac{2z_h}{z_n + z_h} - 1 \right);$$

при этом $1 - 2z_k/(z_n + z_k) < 1$, $2z_k/(z_n + z_k) - 1 < 1$, и из условия (3) следует, что

$$\inf_n \left(\frac{2z_{n+1}}{z_n + z_{n+1}} - 1 \right) = \gamma > 0, \text{ т. е. } z_{n+1} \geq \frac{1+\gamma}{1-\gamma} z_n.$$

Теорема 4. Если λ_k — положительные числа, то система $\{z_k\}$ является безусловным базисом в E в том и только том случае, если $\{z_k\}$ — лакунарная последовательность.

Оператор $P: v(t) \rightarrow v(e^{-x}) \cdot e^{-x/2} = \mu(x)$ изометрично отображает $L_2(0, 1)$ на $L_2(0, +\infty)$, причем $P t^{\beta_k} (\ln t^{-1})^{\alpha_k} = x^{\alpha_k} e^{-(\beta_k + 1/2)x}$. Используя это, из полученных выше результатов выводим следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $\operatorname{Re} \beta_k > -1/2$, $k=1, 2, \dots$, α_k — уменьшенная на единицу кратность появления β_k на «отрезке» $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]$ и $\sup_k \alpha_k < +\infty$.

Положим $w_k = t^{\beta_k} \cdot [\ln(1/t)]^{\alpha_k}$ и $E_1 = (w_k; L_2(0, 1))$. Тогда:

а) система $\{w_k\}$ в том и только том случае является безусловным базисом в E_1 , если

$$\inf_k \left\{ \prod_{n: \beta_n \neq \beta_k} \left| \frac{\beta_n - \beta_k}{\beta_n + \beta_k + 1} \right| \right\} > 0; \quad (8)$$

б) для того чтобы система $\{u_k\}$ составляла базис Рисса в E_1 , необходимо и достаточно, чтобы

$$-1/2 < \inf \operatorname{Re} \beta_n \leq \sup \operatorname{Re} \beta_n < +\infty; \quad \inf_{\beta_n \neq \beta_k} |\beta_n - \beta_k| > 0;$$

в) если последовательность $\{|\gamma_n + 1/2|\}$ лакунарна, где $\{\gamma_n\}$ — все попарно различные числа из $\{\beta_n\}$, то система w_k является безусловным базисом в E_1 (но не наоборот!);

г) если числа β_k вещественны, то последовательность w_k составляет безусловный базис в E_1 тогда и только тогда, когда $\{\gamma_k + 1/2\}$ — лакунарная последовательность.

Утверждение 2) теоремы 5 в частном случае $\alpha_k = 0$, $k=1, 2, \dots$, получено ранее другим путем в работе (8).

Выясним теперь смысл условия (3) в случае $s_k = 1$, $k=1, 2, \dots$. Пусть ρ_j — расстояние элемента $e^{-\lambda_j x}$ от $(e^{-\lambda_k x}, k \neq j; L_2(0, \infty))$. Так как $e^{-\lambda_k x} = P t^{\lambda_k - 1/2}$ и P — изометрический оператор, то ρ_j равно расстоянию d_j элемента $t^{\lambda_j - 1/2}$ от $(t^{\lambda_k - 1/2}, k \neq j; L_2(0, 1))$. Но (см. (9), стр. 26–28)

$$d_j^2 = \frac{1}{\lambda_j + \bar{\lambda}_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\bar{\lambda}_j + \lambda_k} \right|,$$

и справедлива

Теорема 6. Пусть $s_k = 1$, $k=1, 2, \dots$. Система $\{e^{-\lambda_k x}\}$ составляет безусловный базис в E тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_j} e^{-\lambda_j x}\}$ равномерно минимальна.

Определение равномерно минимальной системы приведено в (8).

Следствие. Система $\{t^{\lambda_k}\}$, где $\operatorname{Re} \lambda_k > -1/2$, является безусловным базисом в E_1 тогда и только тогда, когда последовательность $\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_k + 1/2} t^{\lambda_k}$ равномерно минимальна.

Для случая, когда числа λ_k вещественны, последний результат получен ранее иным способом в (8).

Рассмотрим вопрос о базисности «близких» систем в замыкании своей линейной оболочки. Следующее утверждение является некоторым обобщением известной теоремы Н. К. Бари (5).

Лемма 3. Пусть H — гильбертово пространство, $h_k, g_k \in H$, h_k — базис Рисса в (h_k, H) , система $\{g_k\}$ минимальна и квадратично близка к h_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k - h_k\|^2 < \infty. \quad (9)$$

Тогда g_k — базис Рисса в $(g_k; H)$.

Доказательство. Так как h_k — базис Рисса в $(h_k; H)$, то согласно работе ⁽¹⁾ оператор T :

$$(Tx)_k = (x, h_k), \quad k=1, 2, \dots,$$

отображает H на l_2 . Оператор T_1 : $(T_1x)_k = (x, g_k - h_k)$, $k=1, 2, \dots$, в силу условия (9) будет вполне непрерывным оператором из H в l_2 . Тогда оператор T_2 :

$$T_2 = T + T_1, \quad (T_2x)_k = (x, g_k), \quad k=1, 2, \dots,$$

является нормально-разрешимым оператором, т. е. $T_2(H) = \overline{T_2(H)}$. Кроме того минимальность $\{g_k\}$ эквивалентна существованию биортогональной системы к $\{g_k\}$. Поэтому множество $T_2(H)$ содержит все орты и плотно в l_2 . Итак, $T_2(H) = \overline{T_2(H)} = l_2$, и $\{g_k\}$ — базис Рисса в $(g_k; H)$.

Лемма 4. Пусть $\{g_k\}$ — минимальная система, $\{h_k\}$ — безусловный базис в $(h_k; H)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|g_k - h_k\|^2}{\|h_k\|^2} < \infty. \quad (10)$$

Тогда $\{g_k\}$ — безусловный базис в $(g_k; H)$.

Доказательство. Пусть $G_k = g_k / \|h_k\|$, $H_k = h_k / \|h_k\|$. По условию H_k — базис Рисса в $(H_k; H) = (h_k; H)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \|H_k - G_k\|^2 < \infty$. По лемме 3 G_k — базис Рисса в $(G_k; H) = (g_k; H)$ и, следовательно, g_k — безусловный базис в $(g_k; H)$.

Теорема 7. Пусть выполнено условие «близости» (9) (соответственно (10)). Тогда следующие утверждения равносильны:

а) $\{g_k\}$ — минимальная система и $\{h_k\}$ — базис Рисса (соответственно безусловный базис) в $(h_k; H)$

б) $\{h_k\}$ — минимальная система и $\{g_k\}$ — базис Рисса (соответственно безусловный базис) в $(g_k; H)$.

Применим теорему 7 к системе $\psi_k(x) = x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x} (1 + w_k(x))$, где по-прежнему $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, $\sup_k s_k < \infty$. Предположим, что $x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x} w_k(x) \in L_2(0, +\infty)$

и что система $\{x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x}\}$ неполна в $L_2(0, +\infty)$ (последнее предположение эквивалентно условию (7), обеспечивающему существование биортогональной с $\{x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x}\}$ системы и минимальность системы $\{h_k\}$).

Теорема 8. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x} w_k(x)\|^2 < \infty$ (соответственно

$\sum_{k=1}^{\infty} \|(\operatorname{Re} \lambda_k)^{s_k-1/2} x^{s_k-1} e^{-\lambda_k x} w_k(x)\|^2 < \infty$) и выполнено условие (7). Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $\{\psi_k(x)\}$ — базис Рисса (соответственно безусловный базис) в $(\psi_k; L_2(0, +\infty))$;

2) система $\{\psi_k\}$ минимальна и выполнены условия (4), (6) (соответственно условие (3)).

Ростовский государственный университет

Поступило
11 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Ф. Коробейник, Матем. зам., т. 19, в. 2, 259 (1976). ² К. Говман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963. ³ М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, т. 9, № 5, 339 (1974). ⁴ K. G. Vinmore, Proc. Lond. Math. Soc., v. 25, Part 4, 751 (1972). ⁵ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., ГИФМЛ, 1958, стр. 333. ⁶ А. М. Седлецкий, ДАН, т. 208, № 6, 1293 (1973). ⁷ М. М. Джрбашян, ДАН, т. 141, № 3, 539 (1961). ⁸ В. И. Гуракий, В. И. Мацаев, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 1, 3 (1966). ⁹ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., ГИИТЛ, 1947.