

К. И. БАБЕНКО

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 5 XI 1975)

1. Рассмотрим стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости, обтекающей тело $T \subset R^3$, граница S которого имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гёльдера. Пусть u , p , ρ — безразмерные вектор скорости, давление и плотность; поскольку $\rho=1$, плотность выпадает из дальнейших рассмотрений. Начало координат поместим внутрь T , а оси направим так, чтобы $u_\infty = (1, 0, 0)$. За единицу длины примем диаметр T . Если ввести вектор возмущенных скоростей $v = u - u_\infty$, то стационарное движение жидкости будет описываться системой

$$\Delta v - 2\lambda(u_\infty \cdot \nabla)v - 2\lambda \operatorname{grad} p = 2\lambda f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (1.1)$$

где $2\lambda = R$ — число Рейнольдса, а вектор правых частей $f = (f_1, f_2, f_3)$ имеет вид

$$f_k = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad k=1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Граничные условия приобретут вид

$$v|_S = v_0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0. \quad (1.3)$$

В задачах обтекания теория возмущений даже при малых числах Рейнольдса есть теория сингулярных возмущений. Сингулярность происходит из-за некомпактности области и проявляется в том, что в теории возникают два характерных масштаба — диаметр тела и вязкий масштаб $1/R$. Однако, в теории возмущений получен ряд замечательных результатов, и это прежде всего приближение Стокса и его формула для силы, действующей на шар, медленно двигающийся в вязкой жидкости ⁽¹⁾, а также приближение Озеена и озееновская асимптотика течения в окрестности бесконечно удаленной точки ⁽²⁾. В последующем было показано, как вычислять последующие члены асимптотических выражений в формуле для силы, действующей на тело ^(3, 4).

2. Условимся в дальнейшем однородную систему (1.1) обозначать $(1.1)_0$. При построении теории возмущений мы будем опираться на теорию потенциала системы $(1.1)_0$. Для линейаризации Стокса эта теория построена Одквистом ⁽⁵⁾ и Лихтенштейном ⁽⁶⁾; для системы $(1.1)_0$ она строится аналогично.

Пусть $H_{ij}(x, y)$, $i, j=1, 2, 3$, — фундаментальное решение системы $(1.1)_0$,

$$H_{ij}(x, y) = \delta_{ij} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \Phi = -\frac{1}{8\pi\lambda} \int_0^{s} (1 - e^{-\alpha}) \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad (2.1)$$

где $s = |x - y| - u_\infty(x - y)$.

Вектору «скоростей» $H_i = \{H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}\}$ отвечает «давление»

$$p_i = \frac{1}{8\pi\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x - y|} \right), \quad i=1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ дополнение к T до R^3 ; пусть $x \in \mathcal{B}$, $y \in S$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор нормали к S . Положим

$$K_{ij}(x, y) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial H_{ij}(x, y)}{\partial y_k} + \frac{\partial H_{ik}(x, y)}{\partial y_j} + 2\lambda \delta_{kj} p_i(x, y) \right) n_k(y) + \\ + \lambda n_i(y) H_{ij}(x, y),$$

$$P_i(x, y) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial p_i(x, y)}{\partial y_k} + \frac{\partial p_k(x, y)}{\partial y_i} - 2\lambda \delta_{ik} p_1(x, y) \right) n_k(y) + \\ + \lambda n_i(y) p_i(x, y).$$

Потенциалом двойного слоя с плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C[S]$ будем называть интегралы вида

$$v(x) = \int_S K(x, y) \varphi(y) d\sigma_y, \quad p(x) = \int_S P(x, y) \varphi(y) d\sigma_y, \quad (2,3)$$

где $K(x, y)$ — матрица с элементами K_{ij} , вектор $P(x, y) = (P_1, P_2, P_3)$, а $d\sigma_y$ — мера Лебега на S .

Будем искать решение краевой задачи (1,1)₀, (1,3) в виде потенциала (2,3). Тогда плотность будет определяться из соответствующего интегрального уравнения, которое при $\lambda=0$ будет вырожденным. Поэтому целесообразно изменить определение потенциала, чтобы ликвидировать создавшуюся трудность. Положим

$$\mathcal{K}(x, y) = K(x, y) - H(x, y), \quad \mathcal{P}(x, y) = P(x, y) - p(x, y), \quad (2,4)$$

где $H(x, y)$ — матрица с элементами H_{ij} , а $p(x, y) = (p_1, p_2, p_3)$, и определим потенциал двойного слоя формулами

$$v(x) = \int_S \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y, \quad p(x) = \int_S \mathcal{P}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y. \quad (2,5)$$

Если в виде (2,5) искать решение задачи (1,1)₀, (1,3), то плотность φ будет определяться из интегрального уравнения

$$^{1/2}\varphi(x) + \int_S \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y = v_0(x). \quad (2,6)$$

Теперь однородное уравнение (2,6) не имеет нетривиальных решений, если $0 \leq \lambda < \infty$.

З а м е ч а н и е. Поскольку $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(x, y; \lambda)$ — аналитическая функция λ , то из известных теорем вытекает, что решение уравнения (2,6) $\varphi(x, \lambda)$ — аналитическая функция λ , если $0 \leq \lambda < \infty$.

Применим теорию потенциала для построения функции Грина задачи (1,1)₀, (1,3). Учитывая результаты Одквиста и Лихтенштейна, получим следующее

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть $S \in C^{2+\delta}$, $\delta > 0$. Матрица $G(x, y; \lambda)$ и вектор $\lambda R(x, y; \lambda)$ — аналитические функции λ на любом промежутке $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 < \infty$, если $x \neq y$, $x, y \in \mathcal{B}$. Если x, x^1, y принадлежат некоторой окрестности многообразия S , то равномерно по λ , $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, выполняются неравенства

$$|G(x, y)| \leq C|x-y|^{-1}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_k} G(x, y) \right|, \quad |\lambda R(x, y)| \leq C|x-y|^{-2}, \quad k=1, 2, 3. \quad (2,7)$$

3. Рассмотрим нелинейную задачу (1,1) (1,3). Полагая в правой части первого уравнения (1,1) $2\lambda = e$, мы можем отыскивать решение краевой

задачи в виде рядов

$$v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l v^l(x; \lambda), \quad p(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l p^l(x; \lambda). \quad (3,1)$$

Легко написать рекуррентные формулы для определения $v^l(x; \lambda)$, $p^l(x; \lambda)$, $l=0, 1, \dots$. Заметим, что $v^0(x, \lambda)$, $p^0(x, \lambda)$ есть решение задачи (1,1)₀, (1,3). Подобного рода прием был применен Р. Финном ⁽⁷⁾ для доказательства существования решения из класса Р.Р. в случае малых чисел Рейнольдса. Финн получил и сходимость рядов (3,1) при малых λ . Нам нужны более тонкие оценки величин $|v^l(x; \lambda)|$, $|p^l(x; \lambda)|$, которые получаются на основании результатов работы ⁽⁸⁾.

Из этих оценок вытекает

Теорема 1. Если $S \in C^{2+\delta}$, $\delta > 0$, $v_0(x) \in C^2[S]$, то существует такое число Рейнольдса R_* , что решение задачи обтекания (1,1), (1,3) дается рядами (3,1), в которых положено $\varepsilon = 2\lambda = R$, коль скоро $R < R_*$. Если S и $v_0(x)$ входят в компактные семейства, то $\inf R_* > 0$, где нижняя грань берется по этим компактным семействам.

4. Результаты работы ⁽⁹⁾ и установленные выше оценки позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Существует число Рейнольдса R_* , $0 < R_* \leq \infty$, такое, что решение задачи обтекания (1,1), (1,3) в классе решений с конечным интегралом Дирихле единственно, если $R < R_*$. Если $\lambda_0 = 1/2 R_* < \infty$ и для множества решений задачи обтекания имеет место априорная оценка решения, то при $\lambda = \lambda_0$ существует решение $\tilde{v}$, $\tilde{p}$ этой краевой задачи такое, что система в вариациях для (1,1) с однородными краевыми условиями имеет нетривиальное решение в классе $\dot{W}_2^1(\mathcal{B})$.

5. Теорема единственности позволяет в вопросах теории течений с малыми числами Рейнольдса ограничиться решением вида

$$v(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} (2\lambda)^l v^l(x; \lambda), \quad p(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} (2\lambda)^l p^l(x; \lambda). \quad (5,1)$$

Собственно ряды (5,1) являются рядами теории возмущений, причем, как доказано, эти ряды сходятся. В механике жидкостей предпринимались многочисленные попытки получить асимптотические разложения решения задачи в виде $v(x) = \sum \varepsilon_\nu(\lambda) U_\nu(x)$, где $\{\varepsilon_\nu(\lambda)\}$ — некоторая асимптотическая последовательность. Беглый анализ формул (5,1) показывает, что получить асимптотическое разложение такого вида во всей области $\mathcal{B}$ не удастся и что такого рода разложения можно построить лишь в областях Стокса $\mathcal{B}_s = \{x: |x| \ll \lambda^{-1}\} \setminus T$, Озеена $\mathcal{B}_0 = \{x: |x| \gg \lambda^{-1}\}$ и промежуточной области $\{x: |x| \asymp \lambda^{-1}\}$. Асимптотические разложения в этих областях можно получить следующим образом. Нужно в рядах (5,1) удерживать конечное число членов, а затем оставшиеся в конечном числе слагаемые переразложить. При этом определится как сама асимптотическая последовательность $\{\varepsilon_\nu(\lambda)\}$, так и коэффициенты асимптотических разложений. Нетрудно видеть, что в области Стокса асимптотическая последовательность имеет вид $\{\lambda^\nu P_\mu(\ln \lambda)\}$, где $\nu \geq 0$, $\mu \leq \nu$ — целые, а P_μ — алгебраические многочлены.

6. Пусть F — сила, действующая на тело, а F_i — проекция силы на ось x_i . Отправляясь от стандартной формулы, определяющей силу, можно показать, что

$$F_i = F_i^0 - \int_{\mathcal{B}} \sum_{j,k} w_j^i(y) v_k(y) \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_k} dy, \quad (6,1)$$

где F_i^0 — величина проекции силы в озееновском приближении, а w_i — решение некоторой краевой задачи для системы, сопряженной к (1,1)₀. При

$i=1$ вектор w^i имеет прозрачный механический смысл а именно: он равен вектору скорости возмущений при обтекании нашего тела в противоположном направлении, вычисленному в озееновском приближении. Силу, действующую на тело в этом случае, обозначим $(F^0)^*$. Ограничимся рассмотрением силы лобового сопротивления. Используя (5,1), получим

$$F_1 = F_1^0 - I^0 - 2\lambda I^1 + O(\lambda^2 \ln^2 \lambda), \quad (6,2)$$

где

$$I^0 = \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,l} w_k^1 v_l^0 \frac{\partial v_k^0}{\partial x_l} dx, \quad I^1 = \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,l} w_k^1 v_l^0 \frac{\partial v_k^1}{\partial x_l} + v_l^1 \frac{\partial v_k^0}{\partial x_l} dx. \quad (6,3)$$

Используя существенным образом результаты п. 2, найдем, что

$$I^0 = A + \lambda \ln \lambda \sum_{i,j,r} C_{ijr} A_i^* A_j A_r + \lambda \mathcal{B}(\lambda) + O(\lambda^2 \ln \lambda), \quad (6,4)$$

где C_{ijr} — абсолютные константы, $\mathcal{B}(\lambda)$ — тернарная форма от A_i и A_i^* , а сами эти величины определяются из соотношений

$$F_i^0 = \frac{1}{2\lambda} A_i - 2\pi B_i \delta_{ii}, \quad (F_i^0)^* = \frac{1}{2\lambda} A_i^* - 2\pi B_i^* \delta_{ii}. \quad (6,5)$$

Пусть v^s , w^s — векторы возмущенных скоростей, вычисленные в приближении Стокса при обтекании тела в прямом и противоположном направлениях. Тогда

$$A = \int_{\mathcal{B}} \sum_{k,l} w_k^s v_l^s \frac{\partial v_k^s}{\partial x_l} dx. \quad (6,6)$$

Если F^s — сила, действующая на тело, вычисленная в приближении Стокса, то нетрудно видеть, что $F_i^s = \frac{1}{2\lambda} f_i$, где f_i не зависит от λ . Поскольку $F_i^0 = F_i^s + C_i R + O(R^2)$, то

$$F_1 = F_1^0 - A - \frac{1}{2} R \ln R \sum_{i,j,r} C_{ijr} f_i^* f_j f_r + B R + O(R^2 \ln^2 R). \quad (6,7)$$

Заметим, что если тело симметрично относительно плоскости $x_1 = \text{const}$, то $A = 0$. Если тело является телом вращения, то

$$F_1 = F_1^0 - A - \frac{R \ln R}{160\pi^2} f_1^* f_1^2 + B R + O(R^2 \ln^2 R). \quad (6,8)$$

Если обтекаемое тело — сфера, то $f_1 = -f_1^* = 6\pi$, и поэтому

$$F_1 = F_1^0 (1 + \frac{9}{160} R^2 \ln R) + B R + O(R^2 \ln^2 R). \quad (6,9)$$

Тем самым формула Стокса и ее обобщения $(1-4)$ получили полное обоснование.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. G. Stokes, Trans. Camb. Phil. Soc., v. 9, Part II, 8 (1851). ² C. W. Oseen, Ark. Math. Astronom. Fys., v. 6, № 29 (1910). ³ I. Proudman, J. R. A. Pearson, J. Fluid Mech., v. 2, 237 (1957). ⁴ H. Brenner, R. G. Cox, ibid., v. 17, 561 (1963). ⁵ F. K. G. Odqvist, Math. Zs., v. 32, 329 (1930). ⁶ L. Lichtenstein, ibid., v. 28, 387, 725 (1928). ⁷ R. Finn, Arch. Rational Mech. Anal., v. 19, № 5, 363 (1965). ⁸ К. И. Бабенко, М. М. Васильев, ПММ, т. 37, 691 (1973). ⁹ К. И. Бабенко, Мат. сб., т. 91 (133), № 1, 3 (1973).